APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS EN LA ECONOMIA

1. INTRODUCCIÓN

Las derivadas en economía son una herramienta muy útil puesto que por su misma naturaleza permiten realizar cálculos marginales, es decir hallar la razón de cambio cuando se agrega una unidad adicional al total, sea cual la cantidad económica que se esté considerando: costo, ingreso, beneficio o producción.

En otras palabras la idea es medir el cambio instantáneo en la variable dependiente por acción de un pequeño cambio (infinitesimal) en la segunda cantidad o variable.

Tal línea de pensamiento fue posible desde la economía neoclásica, primero con Carnot, y luego con León Walras, Stanley Jevons y Alfred Marshall; por ello se conoce a esta innovación analítica como la revolución marginalista.

De hecho las funciones de costo, ingreso, beneficio o producción marginal son las derivadas de las funciones de costo, ingreso, beneficio, producción total.

En ese orden de ideas, el procedimiento se reitera en el contexto de las funciones multivariadas. Mediante las derivadas parciales, es decir estimar las razones de cambio de una variable independiente de una f(x,y) son las derivadas parciales respecto a x o y, manteniendo la(s) otra(s) fija(s). En consecuencia se pueden aplicar las técnicas especiales como derivadas direccionales, gradientes, diferenciales, etc.

NO hay que olvidar que se requiere con frecuencia estimar los niveles donde una función cualesquiera se maximiza (minimiza) -sea cual sea el número involucrado de variables independientes-. De nuevo el cálculo difrencial es de gran ayuda en estas situaciones. También para la búsqueda de la optimización sujeta a restricciones se trata con derivación de las funciones mediante los métodos de los multiplicadores de Lagrange o las condiciones de Kühn-Tucker (esta última para la eventualidad en que la función objetivo que se desea optimizar esté restringida con desigualdades).

2. MARCO TEORICO

2.1 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS EN ECONOMIA

Las derivadas en sus distintas presentaciones (Interpretación geométrica, Razón de cambio, variación Instantánea, etc.,) son un excelente instrumento en Economía, para toma de decisiones, optimización de resultados (Máximos y Mínimos).

COSTOS

Si el número de unidades de un bien es. x ; entonces el costo Total puede expresarse como:

A partir de este costo total pueden definirse los siguientes conceptos:

COSTO PROMEDIO:

$$Cp = C(x) / x = y$$

COSTO MARGINAL:

$$Cm = C'(x) = dy / dx$$

COSTO PROMEDIO MARGINAL:

$$Cpm = dy/dx = xC'(X) - C(x) / x^2 \quad \rightarrow d/dx * Cp$$

Ej: Si la función de Costo es Lineal $C(x) = ax+ b$. donde a, b son constantes

Costo Promedio: $Cp = C(x) / X = ax + b / x = a + b/x$

Costo Marginal: $Cm = C'(x) = a$

Costo promedio Marginal: $Cpm = d/dx\ Cp = - b/x^2$

INGRESOS:

Si el Numero de unidades de un bien es x: Siendo la Función de demanda : $y = f(x)$; donde y es el Precio de la unidad demandada, entonces el Ingreso es:

$$R(x) = xy = x\text{-}f(x)$$

A partir de esta expresión de ingreso total, se definen los siguientes conceptos:

INGRESO PROMEDIO

$$Rp = r(x) / x$$

INGRESO MARGINAL:

$$Rm = R'(x)$$

Nótese que la expresión de Ingreso promedio carece de mayor importancia puesto que es equivalente a la demanda del bien.

Ejemplo : Una función de Demanda es: $Y = 12 - 4x$

El Ingreso : $R(x) = xy = x(12 - 4x)$

El Ingreso Marginal: $R'(x) = 12 - 8x$

Comúnmente se procura maximizar el Ingreso total para ello es suficiente con recurrir a las técnicas de Máximos y mínimos conocidas (Derivar e igualar a Cero)

Ejemplo: Hallar el Ingreso Marginal y el Ingreso Máximo, que se obtiene de un bien cuya función de demanda es y = 60 -2x

La demanda: y = 60 – ex

El Ingreso: R(x) = xy = x(60 – 2x) = 60x – 2x^2

El Ingreso Marginal: R'(x) = 60 – 4x

Maximizando la ecuación de Ingreso Total:

Si. R8x) = 60x – 2x^2

R'(x) = 60 – 4x = 0 ➔ x=15

Rmax. = 60+15 – 2*15^" = 450

En este problema no se verifica que el Punto Critico hallado mediante la derivada igualada a Cero, determina evidentemente a un máximo ya que se supone de acuerdo las condiciones de cada problema (de todas maneras la verificación es simple utilizando la segunda derivada)

3.1.4 GANACIAS:

Si x es el numero de Unidades; siendo R(x) el Ingreso Total ; c((x), el costo total; la ganancia entonces es:

G(x) = R(x) – C(x)

Para maximizar la Ganancia de acuerdo a técnicas conocidas se debe derivar e igualar a cero esto significa :

G' (x) = R'(x) – C'(x) = 0
➔ r'(x) = C'(x)

Entonces en el máximo de la Ganancia el ingreso Marginal, debe ser igual al Costo Marginal.

Ejemplo

Hallar la ganancia Máxima que se obtiene con determinado bien cuya ecuación de Costo total es: C(x) = 20 + 14x ; La Demanda que posee el bien es: y= 90-2x

El costo total C(x) = 20 + 14x

La Demanda y = 90-2x

El ingreso Total: R(x) xy = x(90-2x)

La Ganancia: G(x) = R(x) – C(x)
= x(90-2x) – (20 + 14 x)

$= -2x^2 + 76x – 20$

Maximizando $G'(x) = -4x + 76 = 0 \Rightarrow x = 19$

GMax. $= 2+19^2 + 76*19 – 20 = 702$

Se supone que las unidades del ingreso; Costo, Ganancia son unidades monetarias iguales.

Similarmente en el problema se supone que las unidades monetarias de la Demanda y Costo son iguales.

Hasta el momento se ha operado en los distintos problemas, con funciones ya conocidas de Demanda, costo, etc.

Sin embargo en la practica es preciso a veces obtener tales funciones a partir de las situaciones que presenten los problemas, que utilizan a las Derivadas como aplicación económica.

Para obtener las funciones de costo demanda, etc. Es conveniente ordenar datos, que provienen de las condiciones del problema de ser necesario se utilizaran variables auxiliares, que posteriormente dieran ser eliminadas, siguiendo luego pasos equivalentes a los sugeridos en los problemas de Máximos y mínimos. Se obtendrán los resultados pedidos.

Ejemplos:
1) Un propietario de 40 departamentos(dep.) puede alquilarlos a 100 $ c/u, sin embargo observa que puede incrementar en 5$ el alquiler por cada vez que alquila un Departamento menos. ¿ cuantos Departamentos debe alquilar para un máximo ingreso?

Reordenando los datos:

Nº Total Dep.   : 40
Nº Dep. Alquilados : x
Nº Dep. no alquilados: u

Alquiler de 1 dep. originalmente : 100$
Incremento por 1 Dep. no alquilado : 5$
Ingreso por u Dep. no alquilados: 5u$
Ingreso por alquiler de 1 DEp. : 100 + 5u
Ingreso por alquiler de x Dep. : x(100+5u)

Reemplazando la ecuación de ingreso es:

$R = x((100+5(40-x))$
$= -5x^2 + 300x$

$R' = -10x + 300 = 0 \Rightarrow x = 30$
Rmax. $= -5*30^2 + 300*30 = 4500\$$

Nótese que no se alquilan 10 dep. (u = 10)
El alquiler de 1 Dep. es :
100 + 5u = 100 + 5*10 = 150$

2. Una entidad bancaria cobra una tarifa de 20$; por cada 1000$ de transacción comercial que efectúa, ofreciendo una rebaja de 0,1$ por cada 1000$ encima del monto de 100000 $. Hallar su máximo Ingreso si:
a) La rebaja afecta al monto total de la transacción.
b) La rebaja afecta únicamente al monto por encima de 100000$

Reordenando datos:
Nº de miles de $ d4e transacción total : x
Nº de miles de $ encima de 100 mil $:u

➔ x = u + 100

Tarifa original por mil $: 20$
Rebaja por mil $ encima de 100mil : 0,1 $
Rebaja por u miles, encima de 100mil : 0,1u $
Tarifa con rebaja: 20 – 0,1u

a) Si la rebaja afecta al monto total de la transacción (x en miles de $); el ingreso es:

R = x(20-0,1u)   R' = - o,2x+30 = 0 ➔ x = 150

= x (20 – 0,1(x-100) ➔ Rmax. = 0.1*150^2 + 30*150 = 2250 mil
= 0,1x^2 + 30x   =2250000$

b) Si la rebaja afecta únicamente a 1 monto por encima de 100miles de $ (u en miles de $) ; el ingreso provendrá del monto con tarifa fija, mas el monto con rebaja:
R = 100*20 + u(20-0,1u)   R' = -0,2x + 40 = 0 =0> x=200
= 2000 + (x-100) (20-0,1(x-100) ➔ Rmax = -0,1 -0,2x +40 0 0 ➔ x=200
= -0,1x^2 + 40 x – 1000   = 3000 miles de $ = 3000000$

3.2 *TASA DE VARIACIÓN MEDIA*

INCREMENTO DE UNA FUNCIÓN

Sea y = f(x) y **a** un punto del dominio de f. Suponemos que **a** aumenta en **h**, pasando al valor a +h, entonces f pasa a valer
f(a +h), al valor **h** se le lama *incremento de la variable*, y a la diferencia entre f(a +h) y f(a) el incremento de la función.

TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Llamamos tasa de variación media (o tasa media de cambio) T.V.M., de la función y =f(x) en el intervalo
[a, b] al cociente entre los incrementos de la función y de la variable, es decir:

T.V.M. [a, b] = $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

Ejemplo 1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 3 - x^2$ en el intervalo [0,2]

Solución

T.V.M. [0, 2] = $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{-1-3}{2} = -2$