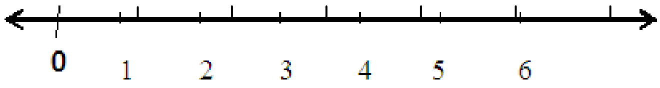
<u>CONJUNTOS NUMÉRICOS</u>

La noción de número es tan antigua como el hombre mismo ya que son necesarios para resolver situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, usamos números para *contar* una determinada cantidad de elementos (existen siete notas musicales, 9 planetas, etc.), para establecer un *orden* entre ciertas cosas (el tercer mes del año, el cuarto hijo, etc.), para establecer *medidas* (3,2 metros, 5,7 kg, –4ºC, etc.), etc.

<u>NÚMEROS NATURALES</u>

Al conjunto de los números que sirven para contar: {0, 1, 2, 3, 4,...} los llamaremos ***números naturales*** y lo notaremos con la letra **N**.
Estos números están ordenados, lo que nos permite representarlos sobre una recta del siguiente modo:



Como podemos observar en la recta numérica, el conjunto tiene un primer elemento, el 0; y ¿cuál es su último elemento? ……………………………………………………………………

<u>Actividad</u>*:*

- ¿Se puede afirmar que todo número natural tiene un antecesor? ¿Por qué? Ejemplificar.

....

- ¿Se puede afirmar que todo número natural tiene un sucesor? ¿Por qué? Ejemplificar.

....

Como ya sabemos, sobre este conjunto de números se pueden definir ciertas operaciones como suma, resta, multiplicación y división. Observemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2+5=7 \\ 5+2=7 \\ 3+20=23 \end{array}\right\} \textit{La suma de dos números naturales da siempre por resultado un número natural}$$

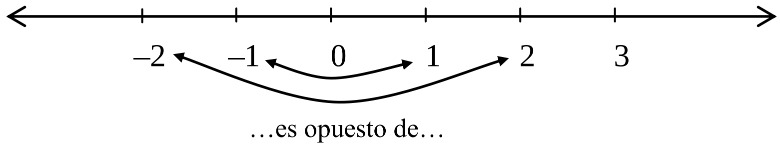
$$\left.\begin{array}{r} 2\,.\,7=14 \\ 5\,.\,8=40 \\ 3\,.\,10=30 \end{array}\right\} \textit{El producto de dos números naturales da siempre por resultado un número natural}$$

$$\left.\begin{array}{r} 8-3=5 \\ 20-7=13 \\ 7-20=? \\ 5-5=? \end{array}\right\} \textit{qué sucede con la resta?}$$

<u>NÚMEROS ENTEROS</u>

Para solucionar el problema de la resta, se crean los números negativos –1, –2, –3, etc. como opuestos de los números naturales. Además se incorpora el cero para dar solución a la resta de un número consigo mismo. El conjunto de los números naturales, sus opuestos negativos y el cero constituyen el conjunto de los ***números enteros***, que se indica con la letra Z. Notemos que N $\subseteq$ Z.

Su representación sobre la recta numérica es la siguiente:



Veamos algunos ejemplos:

- El opuesto de 2 es –2.
- El opuesto de –5 es 5, es decir $-(-5)=5$
- El opuesto de 0 es...............

De esta manera, podemos redefinir la resta de dos números naturales como la suma de dos números enteros.

<u>Ejemplo</u>: Calcular:
1) $23+(-12)=?$ *Solución*: sumar –12 es lo mismo que restar su opuesto, o sea 12, es decir: 23 + (–12) = 23 – 12 = 11
2) $9-(-20)=?$ *Solución*: restar –20 es lo mismo que sumar su opuesto, o sea 20, por lo tanto: 9 – (–20) = 9 + 20 = 29

<u>Actividad:</u>

Completar:

- La suma de dos números enteros da siempre un número.. Dar dos ejemplos.
- La multiplicación de dos números enteros da siempre un número.............................. Dar ejemplos.

Veamos qué ocurre con la división. Observemos lo siguiente:

$4:2=2$ ya que $2\,.\,2=4$
$6:3=2$ ya que $2\,.\,3=6$

En general $a:b$ $b\neq 0$ si se verifica que $b\,.\,c$

¿Cuál será el resultado de ? Debemos pensar en un número entero tal que al multiplicarlo por 3 dé como resultado 4. ¿Qué número entero cumple con esta condición? ....

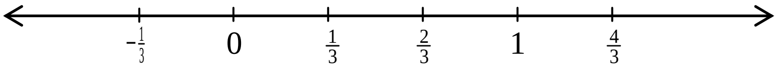
<u>NÚMEROS RACIONALES</u>

Para resolver esta situación habrá que introducir otro conjunto numérico, el conjunto de los ***números racionales*** al que denotaremos con la letra . Un número racional es el cociente (división) de dos números enteros y , siendo . Por lo tanto: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\ ,\ m\ ,\ n\in\ \mathbb{Z},\ n\right.$, donde es el numerador y el denominador.
Notemos que Z $\subseteq$ Q. ¿Por qué?

¿Por qué se excluye al 0 del denominador en la definición?

....

Representemos en la recta numérica algunos números racionales:



Veamos algunos ejemplos de números racionales:

- $\frac{7}{5}$ es racional pues es el cociente de 7 y 5, que son números enteros.
- $-\frac{4}{3}$ es racional pues es el cociente de –4 y 3, que son números enteros.
- 4 es racional pues $\frac{4}{1}$ = 4 y 4 y 1 son enteros.

Tres ejemplos más:

- 0,3 es la expresión decimal de un número racional porque $0{,}3 = \frac{3}{10}$ y 3 y 10 son números enteros.
- $0,\overline{5} = 0{,}55555\ldots$ es la expresión decimal de un número racional porque
- $0,\overline{5} = \frac{5}{9}$ y 5 y 9 son números enteros.
- $0{,}1\overline{5} = 0{,}15555\ldots$ es la expresión decimal de un número racional porque
- $0{,}1\overline{5} = \frac{14}{90}$ y 14 y 90 son números enteros.

Estos tres últimos ejemplos muestran los tres tipos diferentes de expresiones decimales que puede tener un número racional:

- ***Expresión decimal finita:*** $0{,}3, -0{,}107, 12{,}0001$
- ***Expresión decimal periódica pura:*** $0,\overline{5} = 0{,}555\ldots$; $7,\overline{20} = 7{,}202020\ldots$
- ***Expresión decimal periódica mixta:*** $0{,}1\overline{5} = 0{,}1555\ldots$; $-5{,}25\overline{13} = -5{,}251313..$

Todo número racional puede escribirse como una expresión decimal cuya parte decimal puede tener un número finito de cifras o puede tener un número infinito de cifras pero periódicas, pura o mixta.

Supongamos que nos dan el número decimal 23,3555…. Es una expresión decimal periódica mixta, así que ya sabemos que es un número racional y por lo tanto se tiene que poder expresar como una fracción (cociente de dos enteros). ¿Qué fracción es?

Para hallar esta fracción, existe una regla muy simple que podemos resumir así:

$$\frac{(todas\ las\ cifras\ de\ la\ expresión) - (las\ cifras\ no\ periódicas\ de\ la\ expresión)}{tantos\ 9\ como\ cifras\ decimales\ periódicas\ y\ tantos\ 0\ como\ cifras\ decimales\ no\ periódicas}$$

Aplicando esta regla al ejemplo, obtenemos:

$$23{,}3 \qquad \frac{2335-233}{90} = \frac{2}{}$$

y simplificando la fracción obtenemos

$$23{,}3 \qquad \frac{1}{}$$

Otro ejemplo:

$$32{,}1\overline{4} \quad \frac{321427-}{99900} = \frac{321106}{99900} = \frac{160}{49}.$$

Recordemos que siempre podemos verificar si la fracción que obtuvimos es correcta realizando la división y verificando que el resultado coincide con la expresión decimal que teníamos.

Definimos el *inverso* de un número $a \neq 0$ como el número racional que multiplicado por nos da 1, es decir,

<u>Ejemplos</u>:

- El inverso de $a = \frac{2}{5}$ es $\frac{1}{a} = \frac{5}{2}$ pues $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$
- El inverso de $a = -\frac{27}{2}$ es $\frac{1}{a} = -\frac{2}{27}$ pues $-\frac{27}{2} \cdot \left(-\frac{2}{27}\right) = 1$

De esta manera, redefinimos la división de dos enteros como la multiplicación de dos racionales. Además, podemos extender esta idea a la división de dos racionales, definiéndola como la multiplicación del primero por el inverso del segundo.

<u>Ejemplos</u>:

- $2 : 5 = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ es decir a "2 *dividido* 5" lo pensamos como la multiplicación de los números racionales 2 y $\frac{1}{5}$.
- $3 . \frac{1}{2} = 3 \cdot 2 = 6$ es decir a "3 *dividido* $\frac{1}{2}$" lo pensamos como la multiplicación entre 3 y el inverso de $\frac{1}{2}$, que es 2.

<u>**Actividad:**</u>

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1) $\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
2) $\frac{-2}{-3} = -2 \ \frac{1}{3}$
3) La quinta parte de $\frac{1}{7}$ es $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{35}$
4) $-\frac{3}{8} = \frac{-3}{8} = \frac{3}{-8}$

- Como vimos anteriormente, el sucesor inmediato de un número natural n es $n + 1$, por ejemplo el sucesor inmediato de 5 es 5 + 1 = 6. Si consideramos el conjunto de los racionales, ¿Se puede decir cuál es el sucesor inmediato de $\frac{1}{2}$?...

- ¿Se puede determinar cuántos números racionales hay entre $\frac{1}{5}$ y 2?...................................

Observemos que entre dos números racionales, *a* y *b*, *a* < *b*, existe el racional $\frac{a+b}{2}$ que verifica:
$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto $\mathbb{Q}$ es un conjunto **denso**, en contraposición a los naturales $\mathbb{N}$ y los enteros $\mathbb{Z}$, que son conjuntos **discretos**.

NÚMEROS REALES

Números Irracionales

¿Se puede representar a todos los números que se conocen mediante una expresión decimal finita o periódica?
Para contestar a esta pregunta, se debe pensar en un número muy conocido, el número π. ¿Cuál es el valor de π? Una calculadora con 8 dígitos dará como valor de π al 3,141593; una calculadora con 10 dígitos dará como valor de π al 3,14159264. En algún libro de matemática se puede encontrar, por ejemplo: π = 3,14159265358979323846.

¿Será π un número racional? ¿Por qué?
....

A los números reales cuya expresión decimal no es finita ni periódica los llamaremos ***números irracionales***. A este conjunto lo denotaremos con **I**. Algunos ejemplos son:

- $\pi = 3{,}1415926535\ldots$
- $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$
- $-\sqrt{5} = -2{,}236067977\ldots$
- $e = 2{,}7182828\ldots$

Los números irracionales también tienen su ubicación en la recta numérica.

Observemos que la suma de dos números irracionales *no siempre* da un número irracional y que el producto de dos números irracionales *no siempre* da un número irracional.

Buscar ejemplos en donde se verifiquen dichas afirmaciones.

Observar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n\cdot\sqrt{2}$ (si $n \neq 0$) y $n + \sqrt{2}$ son también números irracionales. Se puede generalizar que si $r \in \mathbb{Q}$ y $t \in$ **I**, $r + t$ y $r\cdot t$ (si $r \neq 0$) son números irracionales. Obviamente **I** también es un conjunto infinito de números.

El conjunto formado por los racionales y los irracionales se llama conjunto de ***números reales***, y se designa con la letra $\mathbb{R}$. Notemos que, por esta definición $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Los números reales llenan por completo la recta numérica, por eso se la llama *recta real*. Dado un origen y una unidad, a cada punto de la recta le corresponden un número real y, a cada número real, le corresponde un punto de la recta.

Resumiendo…

Naturales
{0}
Opuestos de los naturales } ***Enteros***

Enteros
Fraccionarios } ***Racionales***

Racionales
Irracionales } ***Reales***

<u>PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES EN $\mathbb{R}$</u>

<u>Suma y producto</u>

Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{R}$ cumplen ciertas propiedades. Veamos algunas de ellas:

Sean *a, b* y *c* números reales cualesquiera.

Propiedades	**de la Suma**	**del Producto**
Ley de cierre	$a+b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$ *	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ *
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Existencia de elemento neutro	Es el 0: $a+0=0+a=a$	Es el 1: $a\cdot 1=1\cdot a=a$
Existencia de inverso	Es el opuesto aditivo: $a+(-a)=(-a)+a=0$	Es el inverso multiplicativo: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1 \quad si \ a\neq 0$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$	

* **Observación:** La propiedad asociativa nos permite prescindir del uso de paréntesis y escribir simplemente $a+b+c$ ó $a\,.\,b\,.\,c$

<u>Actividad:</u>

1) Comprobar con ejemplos las propiedades anteriormente mencionadas

....

2) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas, mencionar las propiedades utilizadas.
   a) $\frac{1}{3}\,.\,(5+4)=\frac{4}{5}+\frac{5}{3}$
   b) $-2.\left(\frac{8}{9}-5\right)=(-2)-5+4)=\frac{4}{5}+\frac{5}{3}$
   c) $\sqrt{2}+c=c+\sqrt{2}$
   d) $\sqrt{2}+2+[8\,.(-9)]=(2+8).[2+(-9)]$
   e) $\frac{1}{a}\,.\,a=1$ para todo a real.

f) Existe un número real x para el cual $\frac{\sqrt{5}}{\pi} + x = 0$

Potenciación

Si a es un número real y n es un número natural, entonces decimos que a^n se obtiene multiplicando n veces el factor a, es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Ejemplo: $a^6 = a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a$

Decimos entonces que a^n es una ***potencia*** que tiene a como ***base*** y n como ***exponente***.
Extendemos la definición para exponentes enteros definiendo, para $a \neq 0$:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{-n} = (a^{-1})^n \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Actividad:

Decir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a) $2^8 = 2^2 \,.\, 2^6 = 2^5 \,.\, 2^3$

b) $(8+3)^2 = 8^2 + 3^2$

c) $(8 \cdot 3)^2 = 8^2 \cdot 3^2$

d) $(2^3)^2 = 2^5$

e) $(2^3)^2 = 2^6$

f) $-3^2 = (-3)^2$

g) $5^4 = 4^5$

h) $\left(\frac{5}{\frac{1}{2}}\right)^{-2} = \frac{5^{-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$

i) $5^{-2} = -10$

La actividad anterior ejemplifica algunas de las siguientes propiedades de la potencia:
Sean a, b números reales distintos de 0 y sean m, n números enteros.

Propiedades de la Potencia	
Distributiva con respecto al producto	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
Distributiva con respecto a la división	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
Producto de potencias de igual base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
División de potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Potencia de potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Observación: Como se vio en el ejercicio anterior la potencia no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta.

- ¿Qué sucede si a un número negativo lo elevamos a una potencia par? ¿Cuál es el signo del resultado?

....

- ¿Existe alguna potencia de 5 que dé como resultado un número negativo? ¿Por qué?

....

Radicación

Para los enteros positivos n ya se ha definido la *n*-ésima potencia de *b*, a saber, b^n. Ahora vamos a utilizar la ecuación $a = b^n$ para definir la *n*-ésima raíz de *a*.
La notación de la raíz cuadrada de 49 es $\sqrt{49}$. Su valor es 7 porque $7^2 = 49$ y $7 > 0$. Aun cuando $(-7)^2 = 49$, el símbolo $\sqrt{49}$ se usa sólo con $+7$ y no con -7, así que se tendrá un solo valor de $\sqrt{49}$. Claro que siempre es posible escribir $-\sqrt{49}$ si se desea el valor negativo -7. Además $\pm\sqrt{49} = \pm 7$. Podemos observar que -49 no tiene una raíz cuadrada real ya que $b^2 \geq 0$ para todo número real b, por lo que $b^2 = -49$ no tiene solución en el conjunto de los números reales. En general, la **raíz cuadrada** de a se define como sigue. A veces recibe el nombre de **raíz cuadrada principal de a.**

Si a es un número *real positivo*, $\sqrt{a} = b$ si y sólo si $a = b^2$ y $b > 0$

Además, $\sqrt{0} = 0$.

Ejemplo:
$\sqrt{49} = 7$, pues $7^2 = 49$ (no es -7 ni ± 7)

Actividad:
Calcular el valor de cada una de las expresiones que siguen, en caso de estar definida:

a) $\sqrt{169}$
b) $-\sqrt{169}$
c) $\pm\sqrt{169}$
d) $\sqrt{625}$
e) $\sqrt{-144}$

En el caso de las raíces cúbicas se puede utilizar tanto números positivos como negativos, así como el cero. Por ejemplo,

$$2^3 = 8 \quad \text{y} \; (-5)^3 = -125$$

Se puede decir entonces que,

Si a y b son números *reales cualesquiera*, $\sqrt[3]{a} = b$ si y sólo si $a = b^3$

En particular, $\sqrt[3]{0} = 0$.

Ejemplo:
$\sqrt[3]{343} = 7$, pues $7^3 = 343$
$\sqrt[3]{1728} = -12$, pues $(-12)^3 = -1728$

Se puede ver que existe una diferencia básica entre las raíces cuadradas y las raíces cúbicas. Las raíces cuadradas están definidas sólo para los números reales positivos y el cero. Las raíces cúbicas están definidas para cualquier número real.
Lo mismo sucede con los enteros positivos mayores *n*: la distinción fundamental surge de si n es par o impar.

- Si n es un entero positivo par y a y b son **números reales positivos** tales que $a = b^n$, entonces se escribe $\sqrt[n]{a} = b$.
- Si n es un entero positivo impar y a y b son **números reales** tales que $a = b^n$, entonces se escribe $\sqrt[n]{a} = b$.
- En cualquiera de los dos casos, $\sqrt[n]{0} = 0$. Además, $\sqrt[n]{a}$ se llama **raíz *n*-énesima de a.**

El símbolo $\sqrt{a}$ se utiliza sólo para representar $\sqrt[2]{a}$.

Observaciones:

- $\sqrt[n]{a}$ recibe el nombre de ***n*-ésima raíz principal de a** para indicar que $\sqrt[n]{a}$ se define positivo si $a > 0$.
- El número a es el **radicando**, $\sqrt{\ }$ es el **signo radical**, n es el **índice** del radical y $\sqrt[n]{a}$ es la **expresión radical** o raíz *n*-ésima de a.

Veamos ahora las propiedades de la radicación, las cuales son análogas a las de la potenciación.

Sean a, b números reales **positivos** y n, m números naturales:

Propiedades de la Radicación	
Distributiva con respecto al producto	$\sqrt[n]{a\,.b} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}$
Distributiva con respecto a la división	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raíz de raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Observaciones:

- Al igual que con la potenciación, la radicación no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta. Proponga ejemplos que muestren que la distributividad no se cumple.

....

- ¿Qué sucede al aplicar la propiedad distributiva al siguiente radical: $\sqrt{(-4)(-16)}$?

....

Simplificación de radicales

Efectuar las siguientes operaciones:

- $\sqrt[4]{2^8}$; $\sqrt{2^4}$ y 2^2: ....
- $\sqrt[10]{3^{20}}$; $\sqrt{3^4}$ y 3^2 ....
- $\sqrt{(-2)^6}$ y $(-2)^3$: ... ...

Observemos que, en algunos casos se puede dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número sin alterar el resultado. A esta propiedad la llamaremos **simplificación de radicales**.

- ¿En qué casos es posibles simplificar radicales y en qué casos no?

....

📖 Si el índice de la raíz es **impar** se puede simplificar **siempre** sin tener en cuenta el signo de la base del radicando. Por ejemplo:

$\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ (dividimos índice y exponente por 5)

$\sqrt[7]{\left(\frac{2}{3}\right)^{21}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ (dividimos índice y exponente por 7)

📖 Si el índice de la raíz es **par**, sólo se puede simplificar **si la base es positiva**, ya que si la base fuera negativa podría presentarse el siguiente caso:

$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ (si dividimos índice y exponente en 4)

Observamos que **los resultados no coinciden**. Por lo tanto:

Cuando el índice es PAR *y el radicando es* NEGATIVO, NO *se puede simplificar***.**

Notemos que la única diferencia en el resultado es el signo y que las raíces de índice par dan como resultado siempre un número positivo. Podemos entonces escribir: $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$, donde el valor absoluto $|a|$ $|a|$ de un número a se define de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a & si \;\; a \geq 0 \\ -a & si \;\; a < 0 \end{cases}$$

CONCLUSIÓN:

Si *n* es impar, $\sqrt[n]{a^n} = a$
Si *n* es par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

<u>Actividad:</u>

1) Descubrir los dos errores cometidos en el siguiente desarrollo:

$$\sqrt[4]{2^8} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{(-2)^8}} + \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} + \left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} =$$

$$= 2^2 \cdot \frac{1}{-2} + \sqrt{(-2)(-8)} + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{-2} + \sqrt{16} + \frac{25}{9} = -2 + 4 + \frac{25}{9} = \frac{43}{9}$$

2) ¿En qué casos vale la igualdad: $\sqrt{(a)^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$?

....

Racionalización de denominadores

Sabemos efectuar divisiones cuando el divisor es un número racional, pero ¿qué sucede si hacemos la división de 3 en $\sqrt{2}$? ¿Cómo realizaríamos dicha operación?
Podemos solucionar este inconveniente si encontramos un cociente equivalente al anterior cuyo denominador sea un número racional. Al procedimiento que nos permite hallar tal cociente equivalente se lo denomina *racionalización de denominadores*.
Veamos algunos ejemplos:

- $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}} \cdot \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{17.21}}{\sqrt{(21)^2}} = \dfrac{\sqrt{357}}{21}$

- $\dfrac{5}{\sqrt[7]{3\,.\,5^3}} = \dfrac{5}{\sqrt[7]{3\,.\,5^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[7]{3^6.5^4}}{\sqrt[7]{3^6.\,5^4}} = \dfrac{5\,.\,\sqrt[7]{3^6.5^4}}{\sqrt[7]{3\,.\,5^3.\,3^6.\,5^4}} = \dfrac{5\,.\,\sqrt[7]{3^6.5^4}}{\sqrt[7]{3^7.\,5^7}} = \dfrac{5\,.\,\sqrt[7]{3^6.5^4}}{3\,.\,5} \dfrac{\sqrt[7]{3^6.5^4}}{3} = \; =$

En ambos casos, para racionalizar una expresión del tipo $\dfrac{1}{\sqrt[n]{b^m}}$ con $m < n$ y $b \in \mathbb{N}$, lo que se hizo fue multiplicar y dividir dicha expresión por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$. De esto resulta una expresión cuyo denominador es $\sqrt[n]{b^m\,.\,b^{n-m}} = \sqrt[n]{b^n}$, y así podemos simplificar índice y exponente para eliminar la raíz del denominador.

Actividad:

Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{-8}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[5]{3}} =$

b) $\dfrac{7}{\sqrt{5^3\,.3^4}} =$

Potencias de exponente fraccionario

Observemos las siguientes analogías:

- $a^{\frac{6}{3}} = a^2$ y $\sqrt[3]{a^6} = a^2$
- $a^{\frac{15}{5}} = a^3$ y $\sqrt[5]{a^{15}} = a^3$

Estos ejemplos nos inducen a adoptar la siguiente definición para el caso de potencias de exponente fraccionario:

$$\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \text{ donde } a \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{Z} \text{ y } m \in \mathbb{N}}$$

- ¿Cuándo es posible calcular una potencia de exponente fraccionario y base negativa?

....

Actividad:

Llevar a exponente fraccionario y resolver:

a) $\sqrt[8]{13}\,.\left(\frac{1}{13}\right)^{-2} =$

b) $\sqrt{\frac{a\,.\,\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}} =$

c) $\frac{7^{-2}\sqrt{\frac{1}{7}}}{\sqrt[3]{7^{-5}}} =$

d) $\frac{16^{0,25}\,.\,\sqrt[3]{2}}{-4}$

Logaritmación

Dada la siguiente potencia $x^3 = 8$, ya hemos visto la operación de radicación que nos permite calcular x como $\sqrt[3]{8}$. Ahora nos interesa resolver la ecuación $2^x = 8$, es decir a qué exponente debo elevar el número 2 para obtener 8 como resultado. Para esto definimos otra operación inversa de la potenciación, la ***logaritmación***, de la siguiente manera:

$log_b\, a = c$ si y sólo si $b^c = a,$ donde $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$

De esta forma, en el ejemplo anterior, $x = log_8 = = 3$.

Ejemplos:

- $log_{\frac{1}{3}}\, \frac{1}{9} = 2$ pues $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
- $log_5\, \frac{1}{125} = -3$ pues $5^{-3} = \frac{1}{9}$
- $log_{10}\, \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ pues $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$
- $log_6 1 = 0$ pues $6^0 = 1$

Actividad:

- ¿Existe $log_4 - 2$? ¿Por qué?

....

- ¿Por qué en la definición se debe aclarar que la base *b* es distinta de 1?

....

Observación: En la práctica hay dos bases de interés especial: 10 y *e* = 2,7182... El logaritmo en base 10 de un número *a* se denota $\log a$ es decir, $log_{10}\, a = \log a$ mientras que el logaritmo en base *e* de *a*, llamado *logaritmo natural o neperiano*, se denota $\ln a$ es decir, $log_e\, a = \ln a$.

El logaritmo cumple con las siguientes propiedades, comprobar con ejemplos.

Para valores *b*, *c*, *x*, *y*, *n* que tengan sentido:

- $log_b(x.y) = log_b\, x + log_b\, y$

- $log_b \frac{x}{y} = log_b\ x - log_b\ y$
- $log_b x^n = n\,.\,log_b\ x$
- $log_b\ x = \frac{\log x}{\log b} = \frac{\ln x}{\ln b}$

Actividad:

Resolver:

1) $log_4 \frac{5}{4} + log_4 \frac{4}{5}$

2) $log(10\,.100)^2$

3) $ln\ \frac{1}{e} - 2\ ln\sqrt{e}$

4) Si $log\, x = \frac{5}{8}$ y $log_b\ x = \frac{2}{3}$, calcular $log\, b$.

RELACIÓN DE ORDEN EN $\mathbb{R}$

Hasta ahora hemos definido ciertas operaciones en los números reales y analizado sus propiedades. En esta sección lo que haremos es establecer un orden entre dos números reales cualesquiera.

Dados dos números reales *a* y *b*, se tiene sólo uno de los siguientes casos:

- $a < b$ (se lee "*a* es menor que *b*", o "*b* es mayor que *a*")
- $b < a$ (se lee "*b* es menor que *a*", o "*a* es mayor que *b*")
- $a = b$ (se lee "*a* es igual a *b*" o "*b* es igual *a*")

Ejemplo: $-8 < 1$; $\frac{1}{5} > 0$; $\sqrt{2} < \sqrt{3}$

Observaciones:

- $a < b$ y $b > a$ son expresiones equivalentes.
- $a \leq b$ (se lee "*a* es menor o igual que *b*") significa que $a < b$ o bien $a = b$. Por ejemplo: $7 \leq 9$ y también $7 \leq 7$.

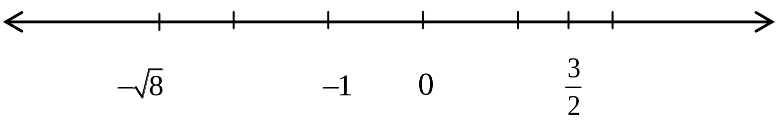
Actividad:

Responder: ¿Es $a < a$? ¿Es $a \leq a$? ¿Por qué?

....

¿Cómo ubicamos a los números reales en la recta numérica?

Para ello debemos tener en cuenta que dados dos números reales el menor siempre deberá estar ubicado a la izquierda del mayor. De esta manera:



Una vez establecido un orden entre los números reales, podemos preguntarnos:

- ¿Cuántos números naturales hay entre -5 y 7?

....

- ¿Cuántos números enteros hay entre -5 y 7?

....

- ¿Cuántos números racionales hay entre -5 y 7? ¿Y cuántos números reales?

....

Como, dados 2 números naturales, existe una cantidad finita de números naturales entre ellos, decimos que el conjunto de los números naturales es **DISCRETO**. También el conjunto de los números enteros es discreto.

Por otra parte, la propiedad que tienen los números racionales y reales de que entre dos de ellos existen infinitos más, se expresa diciendo que tanto $\boxed{}$ como $\boxed{}$ son conjuntos **DENSOS**.

<u>TRABAJO PRÁCTICO – NÚMEROS REALES</u>

1) Completar con los símbolos $\in$, $\notin$, $\subseteq$ ó $\not\subseteq$ según corresponda.

- 4 .... $\mathbb{N}$
- $\sqrt{2}$........ $\mathbf{I}$
- $\mathbf{N}$ .... $\mathbb{R}$
- $\{-2, \pi, 0\}$ .... $\mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2}$........ $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$ .... $\mathbb{R}$
- $0,\bar{3}$........ $\mathbf{I}$
- $\mathbb{N}$ .... $\mathbb{Z}$ .... $\mathbb{Q}$ .... $\mathbb{R}$

2) Dado el conjunto $S = \{12, \frac{5}{3}, \sqrt{7}, -38, 571, \pi, 0.6\}$, encontrar:

a) $S \cap \mathbb{N}$

b) $S \cap \mathbb{Q}$

c) $S \cap \mathbf{I}$

d) $S \cap \mathbb{Z}$

Representar el conjunto S en la recta numérica en forma aproximada.

3) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) La suma de dos números naturales es siempre un número natural.

b) La diferencia de dos números naturales es siempre un número natural.

c) El cuadrado de un número racional negativo es un racional positivo.

d) Existen infinitos números racionales comprendidos entre 0 y $\frac{1}{2}$.

e) El conjunto de los números naturales carece de primer elemento.

4) Responder:

a) Si $m = 14$, ¿cómo pueden representarse los números 13, 15 y 16 en términos de m?

b) Sea n un número par cualquiera, ¿cuál es el siguiente entero par? ¿Cuál el anterior?

c) Si x representa cualquier entero impar, ¿cuál es el siguiente entero impar? ¿Cuál el anterior?

d) Si x es cualquier entero par, ¿$x + 1$ es un entero par o impar? ¿Y $x - 1$?

e) Si x es cualquier entero, ¿$2x$ es par o impar? ¿Y $2x - 1$? ¿Y $2x + 1$?

5) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta proponiendo un contraejemplo, en caso de ser falsa, o enunciando las propiedades aplicadas, en caso de ser verdadera.

a) si $a = -2$ y $b = 0$, entonces $a : b = 0$

b) $(-a) \cdot (-b) = -(a \,.\, b)$

c) el cociente entre un número y su opuesto es igual a -1

d) $a + (-b + c) = a - b + c$

e) el inverso de 2 es $-\frac{1}{2}$.

f) $a : (b + c) = a : b + a : c$, siendo $b + c \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$

g) $b - [-c \cdot (2 - 1) - 1] = b$

h) $a - (b + c) = a - b + c$

i) $(b + c) : a = b : a + c$, con $a \neq 0$

j) para todo $a \in \mathbb{R}$, $a : a^{-1} = 1$

k) para todo $a \in \mathbb{R}$, $(a^{-1})^{-1} = a$

l) $a \cdot (-b) = a \cdot b$

m) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

n) la ecuación $2x = 1$ tiene solución en $\mathbb{Z}$

o) $-(-a) = a$

5) Calcular:

a) $(5 + 3)^2 =$; $5^2 + 3^2 =$

b) $\left(\frac{2}{3} - 1\right)^4$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 1$

c) $(-2)^3$; 3^{-2}

d) $(-2)^{3^2}$; $[(-2)^3]^2$

7) Completar con $=$ ó $\neq$ y mencionar qué propiedades se cumplen o no se cumplen:

a) $(a + b)^n$ .... $a^n + b^n$

b) a^b .... b^a

c) a^{b^c} .... $(a^b)^c$

d) $(p.q)^a$ ...... $p^a \,.q^a$

8) Resolver aplicando propiedades de la potenciación:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)^2 =$

b) $\frac{(3^2 \,.2^3)^3}{6^6} =$

c) $a^{\frac{2}{3}} \,.a^{-1}.\,a \,.a^{-\frac{5}{6}} =$

d) $\left[\frac{2.(3 \,.b^{-2}.d)\,(b \,.d^3)}{12\, b^3 \,.d^{-1}}\right]^5 =$

e) $0{,}2^{-\frac{5}{2}} : \left(5^{-1}\right)^{\frac{3}{4}} =$

9) En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar las propiedades. Indicar cuáles son y corregirlos.

a) $(2^2 \,.\, 2^{-3} \,.\, 2^5)^2 = (2^4)^2 = 2^{16}$

b) $(5^2)^4 : (5^{-3})^2 = 5^6 : 5^{-6} = 5^0 = 1$

c) $\dfrac{7^4 \,.\, (7^2)^6}{(7^9)^2} = \dfrac{7^4 \,.\, 7^{12}}{7^{18}} = (-7)^2 = 49$

d) $(7.2 - 14)^0 + 5^0 = 2$

10) Aplicar las propiedades de potenciación para demostrar que:

a) $(a+2)^2 - (a-2)^2 - 4.(2\,a+1) = -4$

b) $(3 \,.\, 3^{n+1} + 3^{n+2})^3 : (3^{n+2})^3 = 8$

c) $(10 \,.\, 2^{n+1})^3 : (2^{n+1})^3 = 1000$

d) $2^{2-n}.(2 \,.\, 2^{n+1} + 2^{n+2}) = 32$

11) Determinar si han sido resueltos en forma correcta los siguientes ejercicios y justificar:

a) $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$

b) $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{36} = 6$

c) $\sqrt{(-2) \cdot (-8)} = \sqrt{16} = 4$

d) $\sqrt{9+16} = 3+4 = 7$

e) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

f) $\sqrt[3]{-64} : \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{\dfrac{-64}{-8}} = \sqrt[3]{8} = 2$

12) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si x es un número real, entonces $\sqrt{x^2} = x$

b) Si x es un número real, entonces $\sqrt{x^2} = |x|$

c) Si x es un número real, entonces $\sqrt[3]{x^3} = |x|$

d) Si x es un número real, entonces $\sqrt[3]{x^3} = x$

13) Unir con flechas las expresiones iguales, siendo $a, b \in \mathbf{R}^+$:

$\sqrt[3]{64\,a^5 \,.\, 216\,b^9}$	$3\sqrt{a\,.b}$
$\sqrt{\dfrac{400}{25}}$	4
$\sqrt[4]{a^9 \,.\, b^7 \,.\, c^8}$	$24\,a\,b^3\,\sqrt[3]{a^2}$
$5\sqrt{a.b} - \dfrac{5}{3} \,.\, a\sqrt[4]{\dfrac{b^2}{a^2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}a^2 b^2}$	$a^2\,b\,c^3\,\sqrt[4]{a\,b^3}$

14) Calcular:

a) $16^{0,25}$

b) $16^{-0,25}$

c) $\dfrac{2\,.2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}}$

d) $\dfrac{\left(5 \,.\, 5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}{5^{-1}}$

e) $\left(3^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

f) $\left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1)}\right]^{-2}$

15) Expresar como potencia de exponente fraccionario y calcular:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{27}=$

b) $\dfrac{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)^4}{\sqrt[5]{8}}=$

c) $\dfrac{5\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{27}}=$

d) $\dfrac{a\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}=$

16) Demostrar que: $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

17) Calcular:

a) $\log 1000=$

b) $\log_{11}\frac{1}{121}$

c) $\log 1=$

d) $\log\sqrt[3]{10}=$

e) $\log_5 1000-\log_5 40$

f) $\dfrac{\sqrt{3}\,.\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}-4\,.(\log_3 27)^{\frac{1}{2}}}{\log_2\sqrt[3]{4}+\log_{81}9}$

g) $\dfrac{\log_2 128-3\,.\log_2 32}{\log_2 216^6+\log_5 625^3}$

18) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 x+\log_2 5=6$

b) $5^{3x}\,.\,2^x=\sqrt{250}$