## Ecuaciones

Un problema de ingenio frecuente es:

— Pensar un número.

— Sumarle 15.

— Multiplicar por 3 el resultado.

— A lo que se obtiene, restarle 9.

— Dividirlo por 3.

— Restarle 8.

Si la respuesta es, por ejemplo, 32, el número pensado originalmente es 28. ¿Cómo se sabe?

Para contestar esta pregunta, expresemos en lenguaje simbólico todas las operaciones realizadas. Llamémosle $x$ al número pensado originalmente (valor desconocido a averiguar). Entonces:

$$\frac{(x+15)\cdot 3 - 9}{3} - 8 = 32\cdot$$

Aplicando las propiedades conocidas de las operaciones entre número reales, obtenemos:

$$\frac{(x+15)\cdot 3 - 9}{3} - 8 = 32 \Leftrightarrow \frac{(x+15)\cdot 3}{3} - \frac{9}{3} - 8 = 32 \Leftrightarrow x+15-3-8=32 \Leftrightarrow x+4=32\cdot$$

Por lo tanto, realizar todos los cálculos pedidos equivale a simplemente sumarle 4 al número original. De esta manera, restándole 4 a 32 es fácil descubrir cuál había sido el número pensado en principio. Observemos que para resolver el problema utilizamos una igualdad en la que un valor era desconocido. Muchos problemas se resuelven de manera similar, lo que originó el estudio de las…

### Ecuaciones:

Son relaciones de igualdad entre cantidades, algunas de ellas desconocidas.

Por ejemplo: $y + 2x = 5$ ; $x^2 + a = b + 8$ , $2^x + 9 = 17$.

En particular, cuando el valor desconocido es uno solo, a dicha ecuación la llamamos *ecuación con una incógnita*. Algunos ejemplos de ecuaciones con una incógnita son:

a) $3x + 4 = 5x - 8$

b) $2x^2 + 20 = 24x - 20$

c) $\log x = 3 - \log (x + 2)$

### Actividad:

- Si $x$ toma los valores 6, –1 ó 10, ¿cuáles de las ecuaciones anteriores se cumplen? ¿Cuáles no se cumplen?
- ¿Podría determinar *todos* los valores de $x$ que satisfacen la ecuación b)? ¿Por qué?

A aquellos valores de $x$ que satisfacen una determinada ecuación se los denomina ***soluciones*** de la ecuación. Por ejemplo: 5 es solución de la ecuación $-2x + 4 = -x - 1$ puesto que $-2 \cdot 5 + 4 = -5 - 1 = -6$; sin embargo, 2 no es solución de esa ecuación puesto que $-2 \cdot 2 + 4 = 0$, mientras que $-2 - 1 = -3$ y $0 \neq -3$.

El conjunto solución de una ecuación determinada puede:

- *tener un solo elemento*: por ej. $2x = 6$, la única solución de esta ecuación es $x = 3$. Verificarlo.
- *tener un número finito de elementos*: por ej. $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 0$ tiene como soluciones solamente a $\frac{1}{2}$, $-1$ y 0. Verificarlo.
- *no tener elementos*: por ej. $x^2 = -4$, ya que vimos anteriormente que todo número real elevado al cuadrado da como resultado un número no negativo. En este caso decimos que el conjunto solución es vacío.
- *tener infinitos elementos*: $2x - x = x$, puesto que todo número real es solución de dicha ecuación. ¿Por qué?

Actividad:

- ¿Se puede encontrar una ecuación que tenga al número $2$ como solución?
- ¿Se puede encontrar una ecuación que tenga al número $2$ como solución, pero que el conjunto solución posea más de un elemento?
- ¿Se puede encontrar una ecuación que no tenga ninguna solución en $\mathbb{R}$?
- ¿Se puede decir cuál es el conjunto solución de la ecuación $x + 2y = 5$?

Cuando dos ecuaciones tienen el mismo conjunto solución, diremos que dichas ecuaciones son ***equivalentes***. Por ejemplo, las ecuaciones $4x + 6 = x + 9$ y $x - 2 = -1$ tienen ambas como conjunto solución al $\{1\}$.

En el ejemplo introductorio, lo que hicimos fue encontrar sucesivas ecuaciones equivalentes a la dada en un principio, es decir, ecuaciones que tengan el mismo conjunto solución, de manera tal que resulten más fáciles de resolver que la primera. Así, la ecuación equivalente que obtuvimos fue $x + 4 = 32$, mucho más simple de resolver que la ecuación original $\frac{(x+15)\cdot 3 - 9}{3} - 8 = 32$.

¿Cómo podríamos obtener ecuaciones equivalentes de una dada? Para esto, nos valemos de algunas propiedades básicas de las igualdades:

Si $a$, $b$, $c$ y $d$ son cuatro números reales cualesquiera, entonces valen las propiedades siguientes:

1) **Reflexividad:** $a = a$, es decir, todo número es igual a sí mismo.
2) **Simetría:** $a = b \Rightarrow b = a$, es decir, dados dos números $a$ y $b$, si el primero es igual al segundo, entonces el segundo también es igual al primero.
3) **Transitividad:** $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$, es decir, si un número $a$ es igual a otro $b$, y este último es igual a un tercer número $c$, entonces el primero es igual al tercero.
4) **Uniformidad con la suma:** $a = b \Rightarrow a + c = b + c$, es decir, si se suma el mismo número a ambos miembros de una igualdad, se obtiene otra igualdad.
5) **Uniformidad con el producto:** $a = b \Rightarrow ac = bc$, es decir, si se multiplican ambos miembros de una igualdad por el mismo número, se obtiene otra igualdad.

Veamos cómo aplicar dichas propiedades en la resolución de algunas ecuaciones sencillas. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
3x + 8 &= 9 \\
3x + 8 + (-8) &= 9 + (-8) && \text{(por la uniformidad con la suma)} \\
3x &= 1 \\
3x \cdot \frac{1}{3} &= 1 \cdot \frac{1}{3} && \text{(por la uniformidad con el producto)} \\
x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

*Es importante verificar que el valor obtenido satisface la ecuación porque un error en los cálculos puede conducirnos a una solución incorrecta*

**<u>Observación</u>:** ¿Qué sucedería si quisiéramos aplicar la propiedad uniforme de la multiplicación con un valor $x$ desconocido? Consideremos la ecuación $2x = 6$

Multipliquemos ambos miembros por $x$. Resulta $2x^2 = 6x$

- ¿Cuál es el conjunto solución de la primera ecuación?

- ¿Y de la segunda ecuación?
- ¿Son ecuaciones equivalentes?

**Conclusión:**

| |
|---|
| *Si a ambos miembros de una ecuación se los multiplica o divide por un mismo número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente a la primera.* |

**Actividad:**

Determinar si los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes. Justificar.

- $3x - 5 = -2x$ y $3x - 5 + x^2 = -2x + x^2$
- $3x + 4 = 6$ y $x + 4 = \frac{6}{3}$
- $x^2 = 3x^2 - 5x$ y $x = 3x - 5$
- $4.(-2x + 8) = 6x$ y $-2x + 8 = \frac{3}{2}x$
- $-2.(x + 9) = 8$ y $x + 9 = 8 + 2$

**Clasificación de ecuaciones polinómicas**

| |
|---|
| $P(x) = 2x - 1 \Rightarrow$ grado$(P(x))$ = .............<br>**Ecuación lineal o de primer grado:** $2x - 1 = 0$ |
| $P(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow$ grado$(Q(x))$ = .............<br>**Ecuación cuadrática o de segundo grado:** $x^2 - 2x - 3 = 0$ |
| $R(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \Rightarrow$ grado$(R(x))$ =.............<br>**Ecuación cúbica o de tercer grado:** $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ |
| $S(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \Rightarrow$ grado$(S(x))$ =...........<br>**Ecuación de grado n:** $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ |

**Resolución de ecuaciones de primer grado**

Con las propiedades vistas anteriormente estamos en condiciones de resolver cualquier tipo de ecuación de primer grado. Veamos ciertos casos particulares.

- Sea la ecuación lineal: $2x - 8 = 2(3 + x)$

Resolución:

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= 2(3 + x) && \text{por propiedad distributiva:} \\ 2x - 8 &= 6 + 2x && \text{por propiedad uniforme de la suma:} \\ 2x - 8 - 2x &= 6 + 2x - 2x && \text{operando:} \\ -8 &= 6 && \textit{¡ABSURDO!} \end{aligned}$$

¿Qué significa esto? ¿Habremos cometido algún error durante el desarrollo?

No se cometió ningún error. El absurdo provino que la ecuación dada no tiene solución en los números reales, es decir, *no existe ningún* valor de $x$ que satisfaga la ecuación. El conjunto solución de dicha ecuación es vacío.

Sea la ecuación lineal: $-10x = 5(2x - 4x)$

Resolución:

$$\begin{aligned} -10x &= 5(2x - 4x) && \text{operando:} \\ -10x &= 5(-2x) && \\ -10x &= -10x && \text{por propiedad uniforme del producto:} \\ -10x\cdot\left(-\tfrac{1}{10}\right) &= -10x\cdot\left(-\tfrac{1}{10}\right) && \\ x &= x && \end{aligned}$$

Observemos que la ecuación equivalente que obtuvimos se verifica para cualquier valor de $x$. Esto quiere decir que *cualquier* número real verifica la ecuación inicial, es decir, el conjunto solución de dicha ecuación es infinito. Verificar esto con algunos ejemplos.

- Sea la ecuación lineal: $3x - 5 = 8$

Resolución:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 8 && \text{por propiedad uniforme de la suma:} \\ 3x - 5 + 5 &= 8 + 5 \\ 3x &= 13 \\ 3x\cdot\tfrac{1}{3} &= 13\cdot\tfrac{1}{3} && \text{por propiedad uniforme del producto:} \\ x &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

En este caso, existe un único valor de $x$ $\left(x = \dfrac{13}{3}\right)$ que verifica la ecuación original. El conjunto solución es unitario.

**Conclusión:**

| |
|---|
| **Dada una ecuación de primer grado, ésta tiene:**<br>• **ninguna solución.**<br>• **una única solución.**<br>• **infinitas soluciones.** |

## ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Analicemos ahora las ecuaciones lineales con dos incógnitas. Por ejemplo: $2x - y = 3$. Para encontrar una solución de dicha ecuación, debemos hallar un par de números que la satisfaga. A diferencia de lo que ocurre con las ecuaciones lineales con una incógnita, en las ecuaciones lineales con dos incógnitas siempre se encuentran infinitas soluciones. Notemos que si despejamos la incógnita $y$ en la ecuación dada, obtenemos $y = 2x - 3$. Entonces para cada valor de $x$ encontramos un valor de $y$. Este par de números $(x, y)$ es una de las infinitas soluciones de la ecuación dada.

Por ejemplo, los siguientes pares de números son solución de la ecuación $2x - y = 3$:

$(0, -3)$; $(1, -1)$ ; $(\frac{5}{2}, 2)$ .

En efecto, si reemplazamos estos valores en la ecuación inicial dada por todas las soluciones en la ecuación inicial dada $2x - y = 3$ , veremos que se satisface la igualdad:

$$2\cdot0 - (-3) = 3 \quad ; \quad 2\cdot1 - (-1) = 3 \quad ; \quad 2\left(\tfrac{5}{2}\right) - 2 = 3$$

A continuación expresamos el conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación dada, llamado el *conjunto solución o solución general:*

$$S_g = \{(x, 2x - 3),\ x \in \mathbb{R}\}$$

Otra forma de hallar los pares que son solución de la ecuación dada es despejando la variable $x$, obteniendo el conjunto solución

$$S_g = \{(\tfrac{y}{2} + \tfrac{3}{2}, y),\ y \in \mathbb{R}$$

Observemos que ambos conjuntos solución son equivalentes, aunque estén expresados de distinta manera.

## *TRABAJO PRÁCTICO – ECUACIONES*

1)

a) La solución de la ecuación $4x - 8 = 2x - (-x) - (-1)$ es:

b) La solución de la ecuación: $5x + 10x - 6 - 9 + 4x = x + 3 - 12$ es:

c) La solución de la ecuación: $m + 3(4m - 6) = -10 + 2(3m - 5)$ es?

2) Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado y determinar la cantidad de elementos del conjunto solución:

a) $4+x=\frac{1}{2}(15+x)$

b) $(y-1)(2+y)=5-y(4-y)-2y$

c) $3(x+9)=\frac{-5+18x}{6}$

d) $\frac{5}{2}a+2-\left(\frac{a-4}{3}+a+\frac{1}{6}\right)=5a-\frac{2}{3}$

e) $a-x=3(x-a)$, siendo $x$ la incógnita y $a$ un número real fijo.

f) $5t+4-t=4(1+t)$

g) $y-2=6(x+4)$ , siendo ambas, $x$ e $y$, incógnitas

3) Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones e identificar cuáles de ellas son equivalentes:

a) $(y - \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{16}$

b) $(\frac{5}{6}x + 3)^2 = 5x + 8$

c) $-3(x - 1)(x + \frac{1}{2}) = 0$

d) $3x^2 + 3(3x - 1) = 2(3x + 2x^2) - 13$

e) $w^2 - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2} = 0$

f) $-\frac{1}{2}x^2 = -\frac{3}{2}x - 5$

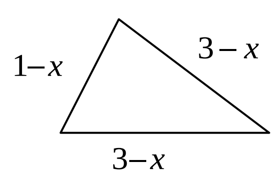
7) Resolver los siguientes problemas:

a) De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después, la tercera parte del resto y quedan aún 1.600 litros. Calcular la capacidad del depósito.

b) Hallar dos números naturales impares consecutivos tales que su producto sea 255.

c) Pienso un número, le sumo 5, a este resultado lo multiplico por 3 y el nuevo resultado lo divido por 10. Obtengo así 6. ¿Qué número pensé?

d) El perímetro del siguiente triángulo es 24 cm. ¿Cuál es la longitud de cada uno de sus lados?



Proyecto de Vida y Empresa