APLICACIONES DE LA DERIVADA.

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO:

Si y = f(x), la razón de cambio instantánea de y por unidad de cambio de x en x_1 es f '(x_1) o, equivalente, la derivada de y con respecto a x en x_1, si esta existe allí.

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN:

Criterio de la primera derivada:

Sea f una función continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) que contiene al número c, y supóngase que f**'** existe en todos los puntos de (a, b) excepto, posiblemente, en c:

- Si f '(x) >0 para todos los valores de x en algún intervalo abierto que tiene a c como su punto extremo derecho, y si f '(x) <0 para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contiene a c como su punto extremo izquierdo, entonces f tiene un valor máximo relativo en c.

- Si f '(x) <0 para todos los valores de x en algún intervalo abierto que tiene a c como su punto extremo derecho, entonces f tiene un valor máximo relativo en c y si f '(x) >0 para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contiene a c como su punto extremo izquierdo, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

TEOREMA 1 (De existencia de máximos y mínimos): Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

TEOREMA 2 (De los puntos críticos): Sea f definida en un intervalo I que contiene al punto c. Si $f_{(C)}$ es un valor extremo, entonces c debe ser un punto crítico; es decir, c es alguno de los siguientes:

i. Un punto frontera de I.
ii. Un punto estacionario de f; es decir, un punto en donde f(c) = 0; o
iii. Un punto singular de f; esto es, un punto donde f'(c) no existe.

Ejemplo:
Dada $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ encontrar los extremos relativos de f, aplicando el criterio de la primera derivada. Determinar los valores de x en los cuales ocurren los extremos relativos, así como los intervalos en los cuales f es creciente y los intervalos en los cuales f es decreciente.
Solución: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; f '(x) existe para todos los valores de x. haciendo f '(x) =0, tenemos: $3x^2 - 12x + 9 = 0$ por lo cual $3(x-3)(x-1) = 0$
x = 3 y x = 1; por tanto los números críticos de f son 1 y 3. Para determinar si f tiene un extremo relativo en alguno de esos números, aplicamos el criterio de la primera derivada.

	f(x)	f '(x)	Conclusión
x < 1		+	F es creciente.
x = 1	5	0	F tiene un valor máximo relativo.
1 < x < 3		-	F es decreciente
x = 3	1	0	F tiene un valor mínimo relativo
x > 3		+	F es creciente

LA PRIMERA DERIVADA Y MONOTONIA:

Si f es continua en el intervalo I y derivable en todo punto interior de I, entonces:
i. Si f'(x) >0 para todo x interior a **I**, entonces f es creciente en **I**.
ii. Si f'(x) <0 para toda x interior a **I**, entonces f es decreciente en **I**.

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA:
Sea c un número crítico de una función f en la cual f '(x) = 0 y f existe para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c, entonces si f ''(x) existe, y

- Si f ''(x) < 0, f tiene un valor máximo relativo en x = c.
- Si f ''(x) > 0, f tiene un valor mínimo relativo en x = c.

Sin embargo, si f ''(x) = 0, el criterio no concluye nada y f puede tener un máximo relativo, un mínimo relativo, o no tener ningún extremo relativo en x = c.
Ejemplo:

Dada $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$, encontrar los mínimos y máximos relativos de f aplicando el criterio de la segunda derivada.

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$$
$$f''(x) = 12x^2 + 8x - 8; \quad \text{haciendo} \quad f'(x) = 0, \text{tenemos:}$$
$$4x(x+2)(x-1) = 0$$

Lo cual da x = 0; x = -2; x = 1. Así los valores críticos de f son -2, 0 y 1. Determinemos si existe o no un extremo relativo en cualquiera de estos números críticos al encontrar el signo que allí tenga la segunda derivada.

Números críticos	F(x)	F ‘(x)	F ‘’(x)	Conclusión
x = -2	-32/3	0	+	F tiene un valor mínimo relativo
x = 0	0	0	-	F tiene un valor máximo relativo
x = 1	-5/3	0	+	F tiene una valor mínimo relativo

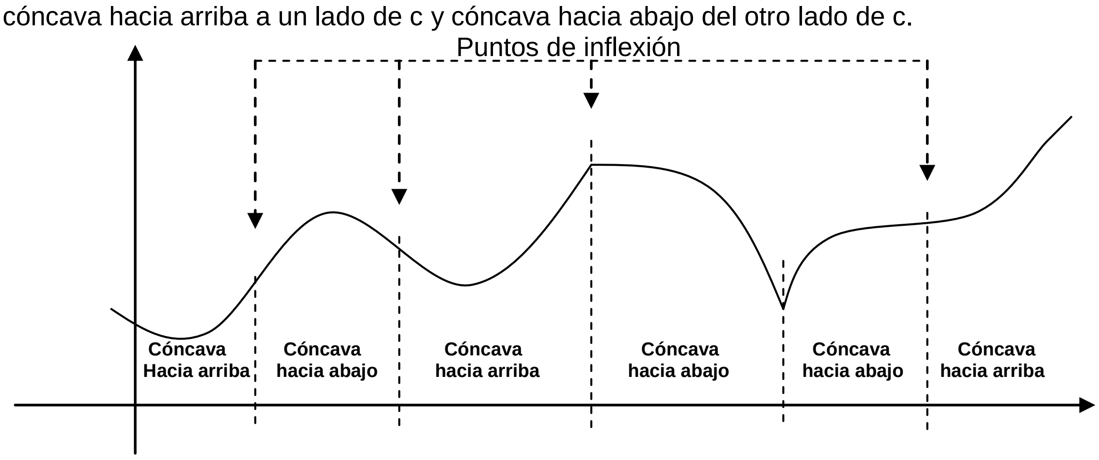
LA SEGUNDA DERIVADA Y CONCAVIDAD

Sea f una función derivable en un intervalo abierto I. Decimos que f (al igual que su gráfica) es cóncava hacia arriba en **I**, si f’ es creciente en **I**, y decimos que f es cóncava hacia abajo en **I**, si f’ es decreciente en **I**.

TEOREMA DE CONCAVIDAD:

Sea f dos veces derivable en el intervalo abierto I.
i. Si f ‘’(x)>0 para toda x en **I**, entonces f es cóncava hacia arriba en **I**.
ii. Si f ‘’(x) <0 para toda x en **I**, entonces f es cóncava hacia abajo o convexa en **I**.

PUNTOS DE INFLEXIÖN: Sea f continua en c. Llamamos a (c, f(c)) un punto de inflexión de la gráfica de f, si f es cóncava hacia arriba a un lado de c y cóncava hacia abajo del otro lado de c.



MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES: Sea S, el dominio de f, que contiene al punto c. Decimos que:
i. f(c) es un valor máximo local de f, si existe un intervalo (a,b) que contiene a c tal que f(c) es el valor máximo de f en (a,b) $\cap$S;
ii. f(c) es un valor mínimo local de f , si existe un intervalo (a,b) que contiene a c tal que f(c) es el valor mínimo de f en (a,b) $\cap$S;
iii. f(c) es un valor extremo local de f, si es máximo local o mínimo local.

COMO USAR EL CALCULO PARA DIBUJAR UNA FUNCIÓN F(X).

- Calcule la derivada f ’(x), halle las coordenadas x de los puntos críticos de primer orden y represente los puntos críticos en el gráfico.
- Calcule la segunda derivada f ‘’(x), halle las coordenadas de los puntos críticos de segundo orden y represente esos puntos críticos en el gráfico.
- Use las coordenadas x de los puntos críticos de primer orden y segundo orden para dividir el eje x en una colección de intervalos. compruebe los signos de la primera y segunda derivadas en cada uno de esos intervalos.
- Dibuje el gráfico en cada intervalo de acuerdo con la siguiente tabla.

Signo de f ‘	Signo de f ‘’	Crec. o Decrec.	Concavidad.	forma
+	+	Creciente	Arriba	
-	+	Decreciente	Arriba	
+	-	Creciente	Abajo	
-	-	Decreciente	Abajo	

EJERCICIOS:

1. En los ejercicios siguientes identifique los puntos críticos y encuentre los valores máximos y mínimos.

1. $f(x) = x^2 + 4x + 4;\ I = [-4,0]$ 2. $f(x) = x^2 + x;\ I = [-2,2]$ 3. $f(x) = x^2 + 3x;\ I = [-2,1]$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1;\ I = [-3,3]$ 5. $f(x) = x^3 - 3x + 1;\ I = \left[-\frac{3}{2},3\right]$

2. Aplicar el criterio de la primera derivada, encontrar los extremos relativos, los valores de x en los cuales ocurren los extremos relativos y los intervalos en los cuales la función es creciente o decreciente.

1. $f(x) = x^2 + 3x;$ 2. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$ 3. $f(x) = x^4 + 4x;$ 4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$

5. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2};$

3. Aplique el teorema de monotonía para encontrar en donde la función dada es creciente y en donde es decreciente.

1. $f(x) = 3x + 3$ 2. $f(X) = (x+1)(x-2)$ 3. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 4. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ 5. $f(x) = x^3 - 1$

4. Aplique el teorema de concavidad para determinar en donde la función dada es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo. También encuentre todos los puntos de inflexión.

1. $f(x) = (x-1)^2$ 2. $f(x) = x^2 - 1$ 3. $3x^3 - 18x$ 4. $f(x) = x^2 - x^{-2}$ 5. $f(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 3x + 1$

6. $f(x) = x^4 - 8x^3 - 2$

5. En los ejercicios siguientes determinar en donde la gráfica de la función dada es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, después dibuje la gráfica.

1. $f(x) = x^3 - 12x + 1$ 2. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$ 3. $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 2$ 4. $f(x) = x^6 - 3x^4$

5. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

6. Identifique los puntos críticos, después utilice (a) la prueba de la primera derivada y (si es posible) (b) la prueba de la segunda derivada para decidir cuales de los puntos críticos dan un máximo local y cuales dan un mínimo local.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$ 2. $f(x) = x^3 - 12x + 4$ 3. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 9$ 4. $f(x) = 3x^3 + 8x^2 - 9x$

APLICACIONES DE LA DERIVADA.

VELOCIDAD Y ACELERACION:

$$v(t) = \frac{ds}{dt},$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ejemplo: Un punto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal de tal manera que su posición en el instante t está especificado por: $S = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$, S se mide en pies y t en segundos.

a) Cuándo la velocidad es cero?
b) Cuándo la velocidad es positiva?
c) Cuándo el punto se está moviendo hacia la izquierda (es decir, en la dirección negativa).
d) Cuando la aceleración es positiva?

Solución:

a. $v = \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 36 = 3(t-2)(t-6)$. Así, $v = 0$ en $t = 2$ y $t = 6$

b. $v > 0$, Cuando $(t-2)(t-6) > 0$. La solución es: $t < 2$ o $t > 6$, en notación de intervalo $(-\infty,2) \cup (6,+\infty)$

c. El punto está moviéndose hacia la izquierda cuando $v < 0$; esto es, cuando $(t-2)(t-6) < 0$. Esta desigualdad tiene como solución el intervalo $(2,6)$.

d. $a = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 24 = 6(t-4)$. Por tanto $a > 0$ cuando $t > 4$.

RESUELVA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS APLICANDO PARA ELLO LAS PROPIEDADES DE LA DERIVADA.

7. En los problemas siguientes: un objeto está moviéndose a lo largo de un eje coordenado horizontal de acuerdo a la fórmula S=f(t), donde S, la distancia dirigida medida desde el origen , está en pies, y t está en segundos. En cada caso, responde las preguntas siguientes:

a. Cuáles son la velocidad y la aceleración en el instante t?
b. Cuándo se está moviendo el objeto a la derecha?

c. Cuándo se está moviendo el objeto a la izquierda?
d. Cuándo es negativa la aceleración?
e. Dibuje un diagrama esquemático que muestre el movimiento del objeto.

a. $s = 12t - 2t^2$ b. $s = t^3 - 6t^2$ c. $s = t^3 - 96t^2 + 24t$ d. $s = 2t^3 - 6t + 5$ e. $s = t^2 + 16t^{-1}; t > 0$

f. $s = t + 4t^{-1;}; t > 0$

8. Se estima que dentro de x años la población de una comunidad será p(x)=10 000+40x+5x^2 personas.
a. A qué ritmo cambia la población después de 10 años?
b. Cuánto cambia la población durante el undécimo año?

9. La temperatura T estimada para un punto de experimentación agrícola está dada por T(t)=20-2t+0,1t^2 grados centígrados a t horas después de la media noche, ($0 \leq t \leq 12$).
a. Calcular la razón de cambio de temperatura entre las 4 a.m. y 9 a.m.
b. Determinar la intensidad de cambio de temperatura a las 10 a.m.

10. El tamaño de un cultivo de bacterias aumenta lentamente según N(t)=n_0 + 26t + t2 , donde n_0 es el número inicial y t es el tiempo en horas. hallar la razón de cambio

- **BUDNICK, Frank; Matemáticas aplicadas para Administración, Economía Y Ciencias Sociales. Editorial McGraw-Hill. 1990.**
- **LEITHOLD, Louis. EL CÁLCULO con geometría analítica. Editorial Harla.**
- **THOMAS, George. CÁLCULO INFINITESIMAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA.**
- **PURCELL, Edwin j. calculo. Prentice Hall. Octava edición, 2001.**