GUIA DE EJERCICIOS N° 5
LIMITE DE FUNCIONES

1. Considere la función $f(x) = x + 5$

   a) ¿Existe $f(-1)$?
   b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ con x cercanos a -1 (por cualquiera de los lados de -1). Investigue qué pasa con las imágenes $f(x)$ cuando x se acerca a -1.

2. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

   a) ¿Existe $f(-2)$?
   b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ con cercanos a -2 (por cualquiera de los lados de -2). Investigue qué pasa con las imágenes $f(x)$ cuando x se acerca a -2.

DEFINICIÓN Significado intuitivo de límite

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca de c, pero diferente de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

3. Calcule los siguientes limites:

   a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x - 3}{4}$

   b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{33x + 42}{22x^2 - 21}$

   c) $\lim_{x \to -4} (2x^2 - 3x^3 + 16)$

   d) $\lim_{x \to -2} (x^2 + 2t - 1)$

   e) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x - 1}$

4. Calcule los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+2x^3-x^2}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

c) $\lim\limits_{t\to -7}\dfrac{t^2+4t-21}{t+7}$

d) $\lim\limits_{t\to 7}\dfrac{\sqrt{(t-7)^3}}{t-7}$

e) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2-4}{h}$

f) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{2x+2}-2}$

j) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

k) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

l) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

LIMITES LATERALES
DEFINICIÓN Límites por la derecha y por la izquierda
Decir que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=L$ significa que cuando x está cerca, pero a la derecha de c, entonces $f(x)$ está cerca de L. De manera análoga, decir que $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=L$, significa que cuando x está cerca, pero a la izquierda de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

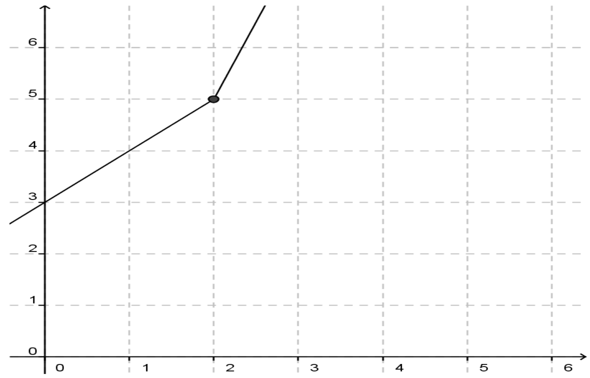
TEOREMA:

$$\lim_{x\to c} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=L$$

5. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=2$, indicando si existe el límite de la función en dicho punto.

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & ; \quad x<2 \\ 3x-1 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$$

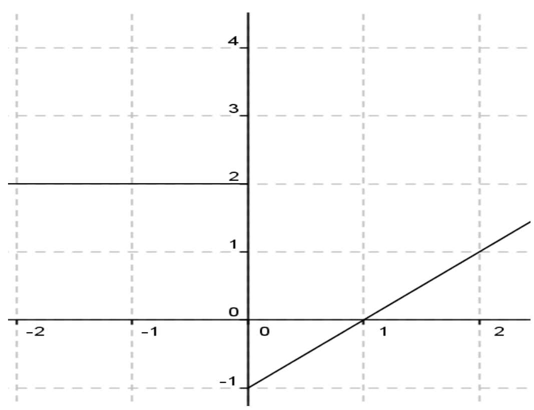
6. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$, cuyo gráfico está a continuación:



7. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$, indicando si existe el límite de la función en dicho punto.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad x \leq 0 \\ x - 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

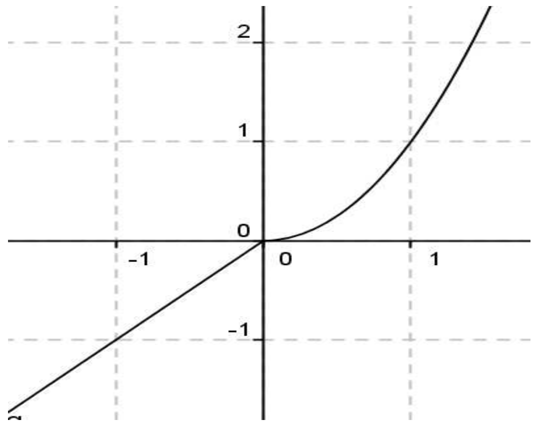
8. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$, cuyo gráfico está a continuación:



9. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$, indicando si existe el límite de la función en dicho punto.

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \leq 0 \\ x^2 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

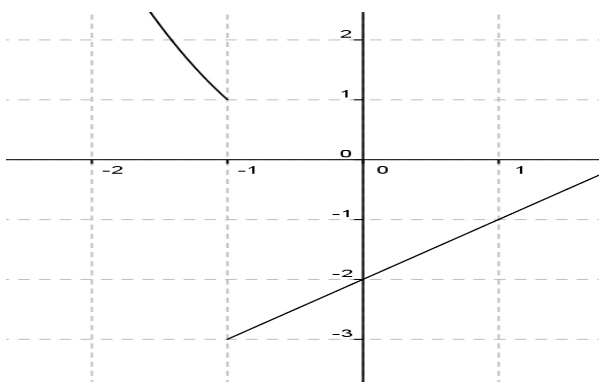
10. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=0$, cuyo gráfico está a continuación:



11. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=-1$, indicando si existe el límite de la función en dicho punto.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x\leq -1 \\ x-2 & ; \quad x>-1 \end{cases}$$

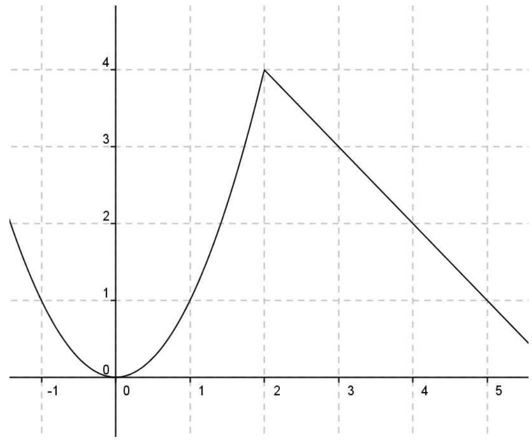
12. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=-1$, cuyo gráfico está a continuación:



13. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=2$, indicando si existe el límite de la función en dicho punto.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x<2 \\ -x+6 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$$

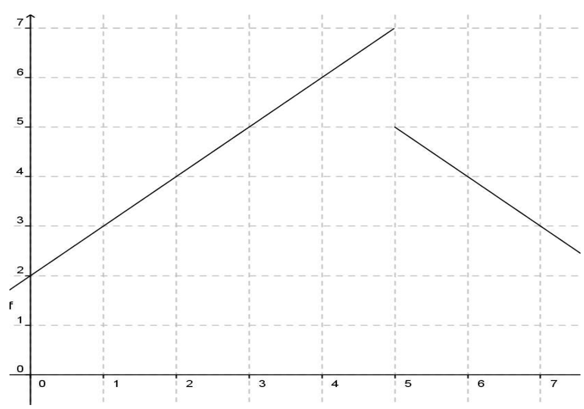
14. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=2$, cuyo gráfico está a continuación:



15. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=5$, indicando si existe el límite de la función en dicho punto.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & ; \quad x\leq 5 \\ -x+10 & ; \quad x>5 \end{cases}$$

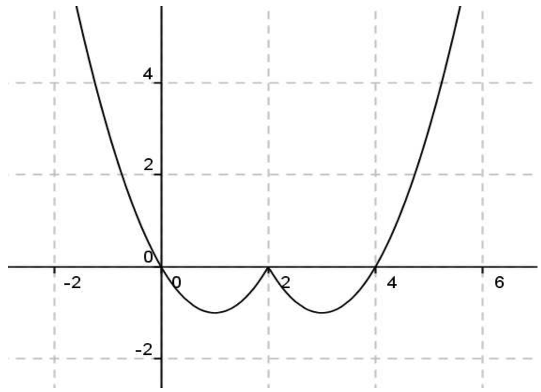
16. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=5$, cuyo gráfico está a continuación:



17. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=2$, indicando si existe el límite de la función en dicho punto.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & ; \quad x\leq 2 \\ x^2-6x+8 & ; \quad x>2 \end{cases}$$

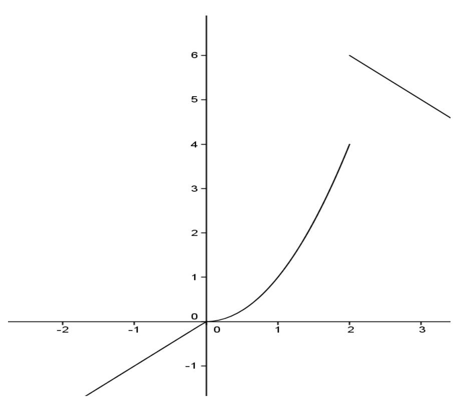
18. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$, cuyo gráfico está a continuación:



19. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ y $x = 2$, indicando si existe el límite de la función en dichos puntos.

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < 0 \\ x^2 & ; \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 8 - x & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

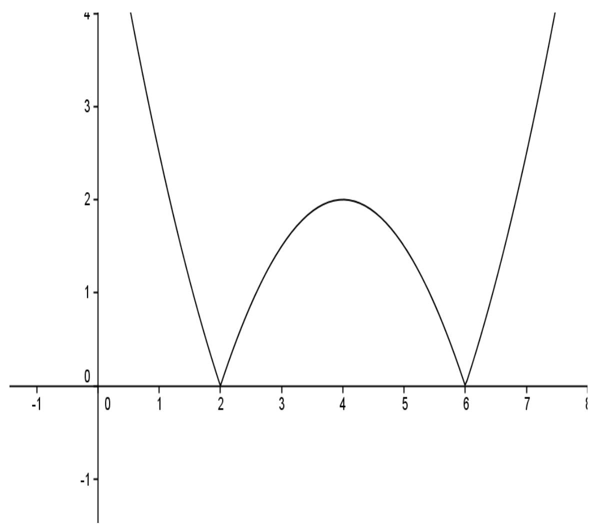
20. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ y $x = 2$, cuyo gráfico está a continuación:



21. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=2$ y $x=6$, indicando si existe el límite de la función en dichos puntos.

$$f(x)=\begin{cases} -4x+6+\dfrac{x^2}{2} & ; \quad x\le 2 \\ 4x-6-\dfrac{x^2}{2} & ; \quad 2<x<6 \\ -4x+6+\dfrac{x^2}{2} & ; \quad x\ge 6 \end{cases}$$

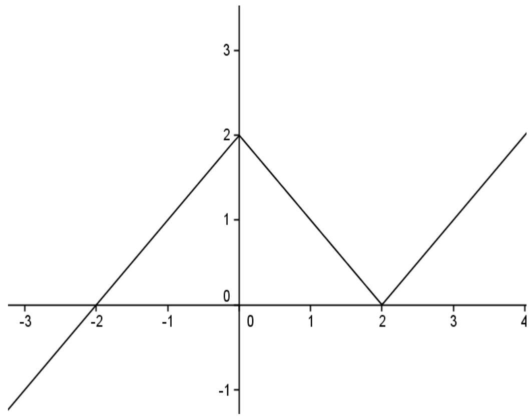
22. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=2$ y $x=6$, cuyo gráfico está a continuación:



23. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=0$ y $x=2$, indicando si existe el límite de la función en dichos puntos.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & ; \quad x<0 \\ 2-x & ; \quad 0\le x<2 \\ x-2 & ; \quad x\ge 2 \end{cases}$$

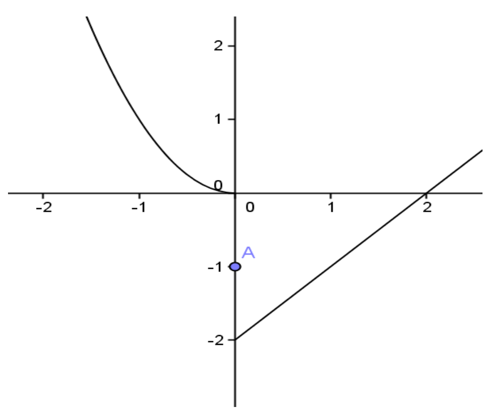
24. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=0$ y $x=2$, cuyo gráfico está a continuación:



25. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=0$, indicando si existe el límite de la función en dicho punto.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x<0 \\ -1 & ; \quad x=0 \\ x-2 & ; \quad x>0 \end{cases}$$

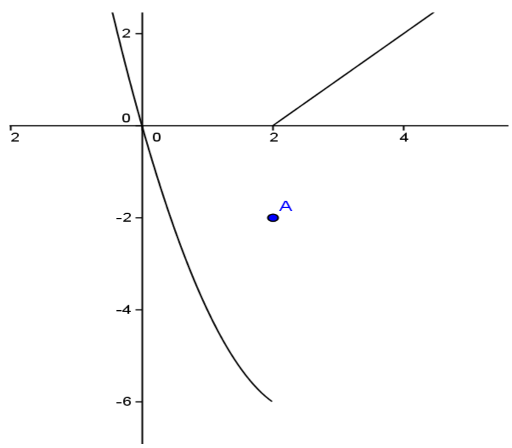
26. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=0$, cuyo gráfico está a continuación:



27. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=0$, indicando si existe el límite de la función en dicho punto.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & ; \quad x<0 \\ 1 & ; \quad x=0 \\ x-2 & ; \quad x>0 \end{cases}$$

28. Calcule los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto $x=2$, cuyo gráfico está a continuación:



SOLUCIONES
GUIA DE EJERCICIOS N° 5
LIMITE DE FUNCIONES

1. a) $f(-1) = 4$

   b)

x	$f(x)$
-0.9	4,1
-0.999	4,001
-0.9999	4,0001
-1.001	3,999
-1.01	3,99
-1.1	3,9

Respuesta: Examinando las imágenes de elementos cercanos a -1, se observa que las imágenes se acercan a 4.

Luego $\lim_{x \to -1} f(x) = 4$

2. a) $f(-2) = \frac{0}{0}$, no existe imagen

   b)

x	$f(x)$
-1.9	-3,9
-1.999	-3,999
-1.9999	-3,9999
-2.001	-4,001
-2.01	-4,01
-2.1	-4,1

Respuesta: Examinando las imágenes de elementos cercanos a -2, se observa que las imágenes se acercan a -4.

Luego $\lim_{x \to -2} f(x) = -4$

3.

a) $\frac{1}{4}$
b) -2
c) 240
d) $2t + 3$
e) 4

4.

a) -1

b) 6

c) -10

d) 0

e) 4

f) $2x$

g) $\frac{1}{4}$

h) 1

i) 6

j) $4a^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{a^3}$

k) $-\frac{1}{16}$

l) $\frac{9}{8}$

5. $\lim\limits_{x\to 2^-}(x+3) = 5$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1) = 5$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$

6. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$

7. $\lim\limits_{x\to 0^-}(2) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = -1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ NO EXISTE

8. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$

9. $\lim\limits_{x\to 0^-}(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

10. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

11. $\lim_{x\to -1^-}(x^2)=1$

$\lim_{x\to -1^+}(x-2)=-3$; $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x)$ NO EXISTE

12. $\lim_{x\to -1^-} f(x)=1$; $\lim_{x\to -1^+} f(x)=-3$

13. $\lim_{x\to 2^-}(x^2)=4$

$\lim_{x\to 2^+}(-x+6)=4$; $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} f(x)=4$

14. $\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$; $\lim_{x\to 2^+} f(x)=4$

15. $\lim_{x\to 5^-}(x+2)=7$

$\lim_{x\to 5^+}(-x+10)=5$; $\lim_{x\to 5^-} f(x) \neq \lim_{x\to 5^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x)$ NO EXISTE

16. $\lim_{x\to 5^-} f(x)=7$; $\lim_{x\to 5^+} f(x)=5$

17. $\lim_{x\to 2^-}(x^2-2x)=0$

$\lim_{x\to 2^+}(x^2-6x+8)=0$; $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} f(x)=0$

18. $\lim_{x\to 2^-} f(x)=0$; $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$

19. Para el punto $x=0$, tenemos que:

$\lim_{x\to 0^-}(x)=0$

$\lim_{x\to 0^+}(x^2)=0$; $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$

Para el punto $x=2$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 2^-}(x^2)=4$$

$$\lim_{x\to 2^+}(8-x)=6 \quad ; \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) \text{ NO EXISTE}$$

20. Para el punto $x=0$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

Para el punto $x=2$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=4 \quad ; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=6$$

21. Para el punto $x=2$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 2^-}(-4x+6+\frac{x^2}{2})=0$$

$$\lim_{x\to 2^+}(4x-6-\frac{x^2}{2})=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} f(x)=0$$

Para el punto $x=6$, tenemos que

$$\lim_{x\to 6^-}(4x-6-\frac{x^2}{2})=0$$

$$\lim_{x\to 6^+}(-4x+6+\frac{x^2}{2})=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6} f(x)=0$$

22. Para el punto $x=2$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=0$$

Para el punto $x=6$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 6^+} f(x)=0$$

23. Para el punto $x=0$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2$$

$$\lim_{x\to 0^+}(2-x)=2 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=2$$

Para el punto $x=2$, tenemos que

$$\lim_{x\to 2^-}(2-x)=0$$

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} f(x)=0$$

24. Para el punto $x=0$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=2 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=2$$

Para el punto $x=2$, tenemos que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=0$$

25. $$\lim_{x\to 0^-}(x^2)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x-2)=-2 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \text{ NO EXISTE}$$

26. $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=-2$$

27. $$\lim_{x\to 0^-}(x^2-2x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x-2)=-2 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \text{ NO EXISTE}$$

28. $$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-6 \quad ; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=0$$