Teoremas de límites

Para facilitar la obtención del límite de una función sin tener que recurrir cada vez a la definición Epsilón-Delta se establecen los siguientes teoremas.
Los teoremas se numeran consecutivamente para facilitar una futura referencia.
Nota: los teoremas se presentan sin demostración, pero quien quiera verla puede hacer clic en el vínculo correspondiente.

Teorema de límite1:
Si *k* es una constante y *a* un número cualquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Teorema de límite2:
Para cualquier número dado *a*,

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Teorema de límite3:
Si *m* y *b* son dos constantes cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Teorema de límite4:
Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

(I) $\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = L \pm M$

(II) $\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = L \cdot M$

(III) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$

(IV) $\lim_{x \to a} \left[k\, f(x) \right] = kL$, k es una constante

Teorema de límite5:
Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n = L^n$$

Teorema de límite6:
Si *f* es un polinomio y *a* es un número real, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Teorema de límite7:
Si *q* es una función racional y *a* pertenece al dominio de *q*, entonces

$$\lim_{x \to a} q(x) = q(a)$$

Teorema de límite8:

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \left[\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}\right] = \sqrt[n]{L}$$

Procedimiento para calcular límites

Si es posible aplicar directamente las propiedades anteriores, el límite se calcula directamente. Con respecto a las propiedades, como la propiedad 6 se aplica a cualquier polinomio y las propiedades 1, 2, 3, y 4 implican funciones polinómicas es indistinto que nos refiramos a cada una de las propiedades 1 a 4 en particular que a la propiedad 6 cuando calculamos el límite de una función polinómica. Lo mismo, la propiedad 7 se aplica a una función racional y la propiedad 4 (III) también.

Cuando al sustituir la *a* por *x* en la función nos da la forma indetermidada 0/0 es posible calcular el límite pero, previamente, hay que transformar la fórmula de la función de tal modo que se pueda evitar la división por cero: para lograr esto disponemos de procedimientos algebraicos eficaces como la factorización, la conjugada, etc.

Ejercicios resueltos **E**valué los siguientes límites indicando la propiedad o propiedades que se aplican en cada paso:		
1. $\lim_{x\to 3} 77$	**2.** $\lim_{x\to 5}(3x-7)$	**3.** $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)$
4. $\lim_{x\to 3} \frac{4x-5}{5x-1}$	**5.** $\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}$	**6.** $\lim_{x\to -3/2} \frac{4x^2-9}{2x+3}$
7. $\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$	**8.** $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$	**9.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$	**11.** $\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$	**12.** $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16}$

S o l u c i o n e s

1. Solución

De acuerdo con el Teorema de límite1

$$\lim_{x\to 3} 77 = 77$$

2. Solución:

$f(x) = 3x-7$: tiene la forma $mx+b$; por lo que aplicamos el Teorema de límite3

$$\lim_{x\to 5}(3x-7) = 3(5)-7 = 15-7;$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 5}(3x-7) = 8.$$

3. Solución:

$$f(x) = x^2 + 2x - 1: \text{ función polinomial}$$
$$f(2) = 2^2 + 2(2) - 1 = 7;$$
por lo tanto, según el Teorema de límite6:
$$\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 1) = 7.$$

4. Solución:
$$f(x) = \frac{4x-5}{5x-1};\ 3 \in dom f,\ \text{y } f \text{ es una función racional}$$
Y $\quad f(3) = \dfrac{4(3)-5}{5(3)-1} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$

por lo tanto, aplicando el Teorema de límite7, se concluye que
$$\lim_{x \to 3} \frac{4x-5}{5x-1} = \frac{1}{2}$$

5. Solución:
Aplicando consecutivamente las propiedades TL8, TL7 y TL3, se obtiene:
$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{8x+1}{x+3}} = \sqrt{\lim_{x \to 1}\left[\frac{8x+1}{x+3}\right]} = \sqrt{\frac{\lim_{x \to 1}(8x+1)}{\lim_{x \to 1}(x+3)}} = \sqrt{\frac{8(1)+1}{1+3}} = \sqrt{\frac{9}{4}};$$
$$\therefore \quad \lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{8x+1}{x+3}} = \frac{3}{2}.$$

6. Solución:
No es posible aplicar directamente el TL7, pues se obtendría la forma indeterminada 0/0; no obstante, luego de factorizar y simplificar la expresión, se obtiene fácilmente el límite aplicando el TL1:
$$\lim_{x \to -3/2} \frac{4x^2-9}{2x+3} = \lim_{x \to -3/2} \frac{(2x-3)\cancel{(2x+3)}}{\cancel{(2x+3)}} = \lim_{x \to -3/2}(2x-3) = 2\left[-\frac{3}{2}\right] - 3 = -3 - 3;$$
$$\therefore \quad \lim_{x \to -3/2} \frac{4x^2-9}{2x+3} = -6.$$

7. Solución:
No es posible aplicar directamente el TL7, pues se obtendría la forma indeterminada 0/0; no obstante, luego de factorizar y simplificar la expresión se obtiene fácilmente el límite aplicando el TL7 o el TL4(III):
$$\lim_{x \to 4} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4} = \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(3x+4)}{\cancel{(x-4)}(2x-1)} = \lim_{x \to 4} \frac{3x+4}{2x-1} = \frac{3(4)+4}{2(4)-1} = \frac{12+4}{8-1};$$
$$\therefore \quad \lim_{x \to 4} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4} = \frac{16}{7}.$$

8. Solución:

Si pretendiéramos aplicar el límite directamente a partir del TL7, nos daría la forma indeterminada 0/0;
por lo que, se debe factoriazar y luego simplificar la expresión antes de poder hacer uso del TL6:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}}=\lim_{x\to -2}(x^2-2x+4)=(-2)^2-2(-2)+4=4+4+4;$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=12.$$

9. Solución:

No se puede aplicar el límite directamente, daría la forma indeterminada 0/0; no obstante, luego de multiplicar tanto el numerador como el denominador por la conjugada de la expresión en el numerador y luego reduciendo y simplificando, se puede aplicar el TL para hallar el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)},$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}};$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

10. Solución:

Luego de la transformación de la expresión se aplican los TL7 y TL8:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1},$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(0+1)^2}+\sqrt[3]{0+1}+1};$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\frac{1}{3}.$$

11. Solución:

El límite no se puede aplicar directamente, resultaría la forma indeterminada 0/0; no obstante, una vez factorizando y simplificando, la expresión queda expedita para hallar el límite mediante los TL7 y TL6:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(2x^2+x+1)}{\cancel{(x-3)}(4x^2-x+1)} = \lim_{x\to 3}\frac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \frac{2(3)^2+3+1}{4(3)^2-3+1};$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \frac{11}{17}.$$

12. Solución:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = \lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-2)(x^2+4)} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{(x-2)(x^2+4)},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2-2)((-2)^2+4)} = \frac{4+4+4}{-4(8)} = -\frac{12}{32};$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = -\frac{3}{8}.$$