LÍMITES DE FUNCIONES

INTRODUCCIÓN

Cálculo infinitesimal

Designación conjunta para el cálculo diferencial, integral y de variaciones; en principio fue el calculo ingenuo con magnitudes infinitamente pequeñas; en la actualidad es el cálculo mediante límites

El concepto de límite marcó una gran diferencia entre las matemáticas fundamentales y el cálculo. El nacimiento del **cálculo infinitesimal** permitió el desarrollo de ideas importantes en matemáticas y física. Conocer la velocidad y la aceleración de un objeto a partir de la posición o conocer la posición a partir de la velocidad y la velocidad a partir de la aceleración, involucra procesos propios del cálculo.

Los límites son importantes para estudiar el comportamiento de datos que se han modelado mediante ecuaciones matemáticas, como crecimiento de poblaciones, desintegración de materiales radiactivos, inversiones de capital y velocidades límites alcanzadas por cuerpos que caen desde una altura dada.

Cuando, por ejemplo, un paracaidista de masa *(m)*, cae por la acción de la gravedad *(g)*, la resistencia del aire logra disminuir la velocidad de caída. La velocidad del paracaidista en función del tiempo, está dada por la ecuación: $V(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}\right)$, en donde ***k*** es una constante positiva. A medida que transcurre el tiempo, el término $e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}$ se hace cada vez más pequeño, de tal manera que la velocidad límite es $V(\infty)=\frac{mg}{k}$ (ver pie de página). Esta velocidad es aproximadamente 20 km/h

PRÁCTICA PREVIA DE ÁLGEBRA

A. Utilice un método apropiado para factorizar cada una de las expresiones:

1 $3x + 4x^2 - 5xy + 12xz$

2 $6x^2 + 10xy + 18z + 22y$
3 $27xz^2 - 33x^2z + 18x^3yz$
4 $X^2(1 - y) + y^2(1 - y)$
5 $2x(1 + 2y) + 3y(1 + 2y)$
6 $Z(2x - 1) - 2x + 1$
7 $-3x + 2 - 5x(3x - 2) + 2y(3x - 2)$
8 $2x + 4xy + 3z + 6yz$
9 $10xz - 5xy + 8yz - 4y^2$
10 $8xy - 24y + 10x^2 - 30x + 7xz - 21z$
11 $4x^2 - 20x + 25$
12 $Z^2 + 14z + 49$
13 $48xz + 16x^2 + 36z^2$
14 $\frac{x^2}{25} - \frac{6xy}{5} + 9y^2$
15 $16 - y^2$
16 $25x^2 - 81y^2$
17 $100x^4z^2 - 16y^2$
18 $\frac{x^2}{36} - \frac{25}{49}$
19 $(x - 2)^2 - 1$
20 $(x + 5)^2 - 25$

B. Simplifique cada una de las expresiones dadas

1 $1 + \frac{2}{3x}$

2 $\frac{2}{x} - \frac{1}{6x} + \frac{1}{3}$

3 $\frac{1}{6x^3} - \frac{3}{4x} - \frac{2}{3}$

4 $\frac{6x^2}{3(x-1)} - \frac{6}{3(x-1)}$

5 $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}$

6 $\dfrac{1-\frac{2}{y}}{1+\frac{1}{y}}$

7 $\frac{x}{x^2+4x} + \frac{2x}{3x^2-48}$

TEOREMA DE LA UNICIDAD

1. *Hallar el límite, en caso de que exista.*

   a) *Hallar* $\lim_{x\to 5} f(x)$, *si* $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{si } x < 5 \\ 6x-7, & \text{si } x > 5 \end{cases}$

b) Hallar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$*, si* $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-5, & \text{si } x<1 \\ 3x-7, & \text{si } x>1 \end{cases}$

c) Hallar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$*, si* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2}, & \text{si } x<2 \\ x(6x-12), & \text{si } x>2 \end{cases}$

2. Si $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2-4}{x-2}, & \text{si } x>3 \\ -x, & \text{si } x<3 \end{cases}$ *Calcula el valor de **a** para que* $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$***,** exista.*

3. Si $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3ax^2-4}{4x-7}, & \text{si } x>2 \\ 4x, & \text{si } x<2 \end{cases}$ *Calcula el valor de **a** para que* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ *exista.*

4. Si $f(x)=\begin{cases} 5ax^2-3, & \text{si } x>-1 \\ -5x, & \text{si } x<-1 \end{cases}$ *Calcula el valor de **a** para que* $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ *exista.*

PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN

Evaluar los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+6}{5x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt[3]{x+4}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{\dfrac{25-(x+1)^2}{5+(x+1)}}$

5. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{\dfrac{x_2-1}{x-1}}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+x}{x-1}$

7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x^2-9)(x^3+2x^2-3x)}{x^2-3x}$

FORMA INDETERMINADA $\dfrac{0}{0}$:

1. Calcula los siguientes límites, eliminando las indeterminaciones que se presenten

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ *b)* $\lim\limits_{m\to 1} \dfrac{3m^2-3}{m-1}$ *c.* $\lim\limits_{t\to -4} \dfrac{t^3+64}{t+4}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ *e)* $\lim\limits_{t\to 3} \dfrac{t^2-9}{t^2-5t+6}$ *f)* $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{x-64}{\sqrt{x}-8}$

g) $\lim_{u\to 0}\frac{5u^3+8u^2}{3u^4-16u^2}$ h) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ i) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x+1}$

j) $\lim_{v\to 3}\frac{\sqrt{v+1}-2}{v-3}$ k) $\lim_{n\to 0}\frac{\sqrt{5+n}-\sqrt{5}}{\sqrt{2n}}$ l) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x-6}$

m) $\lim_{h\to 3}\frac{\sqrt{2h+3}-h}{h-3}$ n) $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-4}$ o) $\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{4-x^2}$

2. *Dada la función* $f(x)=x^2-3x$, *hallar* $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

3. *Dada* $f(x)=\sqrt{5x+1}$ *hallar* $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *cuando* $x>-\frac{1}{5}$.

4. *Resuelve los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$ b) $\lim_{v\to 2}\frac{v-2}{v^2-4}$ c) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ e) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ f) $\lim_{x\to 1}\frac{(2x+3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}$

g) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ h) $\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+3x+2)}{x^2+4x+3}$ i) $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^{-2}-2^{-2}}{h}$

5. *Resuelve los siguientes límites:*

a) *Si* $f(x)=bx^2+cx+d$, *demuestre que* $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2bx+c$

b) *Si* $f(x)=x^2$, *demuestre que* $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x$

c) *Si* $f(x)=\frac{1}{x}$, *demuestre que* $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{1}{x^2}$

5. $\lim_{x\to 1/2}\frac{4x^3-8x^2+11x-4}{2x-1}$ 6. $\lim_{a\to -2}\frac{2a^3-2a^2-4a+16}{a+2}$

7. $\lim_{a\to -1}\frac{a^4-a^2+2a+2}{a+1}$ 8. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4+5x-6}{x-1}$

LÍMITES AL INFINITO:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{3x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+3x+1}{2x^2-4x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^3+x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x^3+1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5-6x^4+3x^2}{3x^3+5x^2+6x}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{1+x}{x^2}}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{3x+2}-x$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^4+3x}{3x^3-4x^2}\right]$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$

k) $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{u^3}{u^2+\frac{3}{4}+u^3}$

l) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{3t^4+3t^3+3t}{4t^4+2t^3}$

m) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\sqrt{1-z^2}}{2z-3}$

n) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1-z}{\sqrt{1-z^2}}$

o) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{4x+5}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{6+x-3x^2}$

q) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+5}$

r) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x^2+5x+6}$

s) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x-1}-x$

t) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3x-\sqrt{4x+2}\right)$