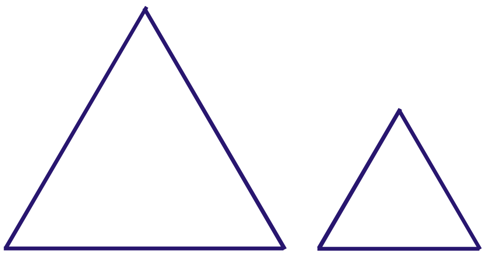
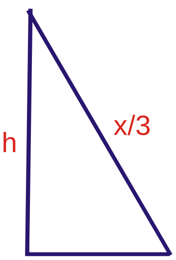
Disponemos de un alambre de longitud 100 m. y queremos dividirlo en dos pedazos para formar con cada uno de ellos un triángulo equilátero. Calcula la longitud de cada uno de los pedazos para que la suma de las áreas de los dos triángulos sea mínima .



Resolución:

Uno de los trozos medirá x metros y el otro $100\text{-}x$ metros, con lo que el lado de cada uno de los triángulos equiláteros será $\frac{x}{3}$ y $\frac{100-x}{3}$ metros respectivamente, como en la figura. Vamos a calcular el área de uno de los triángulos equiláteros. Para ello utilizaremos el Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo que tenemos a la derecha:



$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36}} = \sqrt{\frac{27x^2}{36}} = \frac{3\sqrt{3}x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Calculamos de la misma forma la altura del otro triángulo equilátero

$$h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(100-x)$$

La función que debemos minimizar es la suma de las dos áreas, es decir

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(\frac{100-x}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(100-x)\right)\right]$$

Agrupando y sacando factor común llegamos a la expresión: $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(\frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{(100-x)^2}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(2x^2 - 200x + 10000\right)$

Derivamos: $S' = \frac{\sqrt{3}}{12}(4x-200) \rightarrow S'(x) = 0$ *cuando* $x = 50$. La segunda derivada es $S''(x) = \frac{4\sqrt{3}}{12} > 0$ para cualquier valor de x, con lo que $x = 50$ es un mínimo para la función. Los dos pedazos han de ser iguales y, de esta forma, los dos triángulos que se formen con ellos también. El área de cada uno de ellos será

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{50}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}50 = \frac{625\sqrt{3}}{3}m^2$$