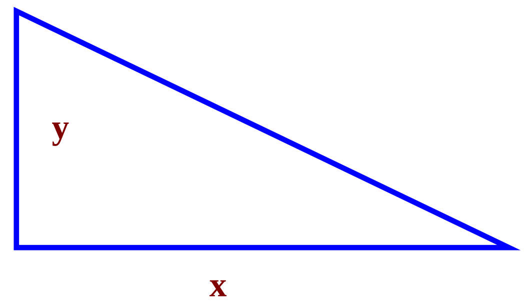
De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 50 m., encuentra el que tiene área máxima.



Resolución:

Llamaremos x e y a los catetos.

De esta forma, la función que deberemos optimizar (en este caso, maximizar) será la función área que, como se trata de un triángulo rectángulo es: $A(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{2}$

El dato que me proporciona el ejercicio es que la hipotenusa de este triángulo mide 50 m, por tanto la relación que liga a las incógnitas es $50^2 = x^2 + y^2$ (Tª de Pitágoras). Como siempre, despejamos la y y sustituimos en la función a maximizar:

$y=\sqrt{50^2-x^2}$ y así $A(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{2}\rightarrow A(x)=\dfrac{x\sqrt{50^2-x^2}}{2}$ y ahora derivamos esta función

$$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{50^2-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{50^2-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{50^2-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{50^2-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{50^2-2x^2}{\sqrt{50^2-x^2}}\right)$$

Para calcular los extremos igualamos a 0 la derivada, $A'(x)=0$, por tanto

$$\frac{1}{2}\left(\frac{50^2-2x^2}{\sqrt{50^2-x^2}}\right)=0\rightarrow 50^2=2x^2\rightarrow x^2=1250\rightarrow x=\sqrt{1250}\rightarrow x=25\sqrt{2}m.$$

(no consideramos la raíz negativa porque no tiene sentido en nuestro problema).

Calculemos la 2ª derivada:

$$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{50^2-2x^2}{\sqrt{50^2-x^2}}\right)\rightarrow A''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-4x\sqrt{50^2-x^2}-\left(50^2-x^2\right)\dfrac{-x}{\sqrt{50^2-x^2}}}{\left(50^2-x^2\right)}\right)=...=\frac{x\left(3x^2-7500\right)}{\left(50^2-x^2\right)^{3/2}}$$

$A''(25\sqrt{2})<0$ y, por tanto, el punto $x=25\sqrt{2}$ es un máximo. Las medidas del triángulo son: $x=25\sqrt{2}$, $y=25\sqrt{2}$ y el área es $A(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{2}=625\,m^2$. Se trata de un triángulo isósceles.