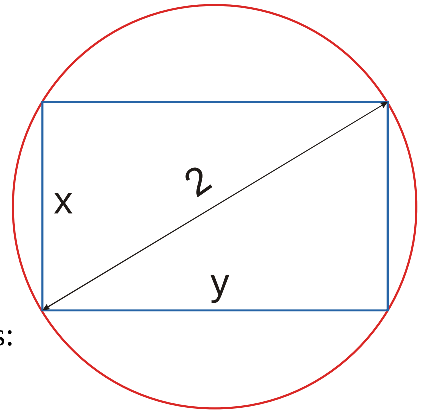
Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 1 m., calcula las dimensiones del que tiene área máxima.



Resolución:

Llamaremos x e y a los lados del rectángulo inscrito.

De esta forma, la función que deberemos optimizar (en este caso, maximizar) será la función área que, como se trata de un rectángulo es: $A(x,y)=x\cdot y$

El dato que me proporciona el ejercicio es el radio de la circunferencia que es 1 m, por tanto la relación que liga a las incógnitas es $2^2=x^2+y^2$, ya que la diagonal del rectángulo es el diámetro de la circunferencia.

Despejamos la y y sustituimos en la función a maximizar:

$y=\sqrt{2^2-x^2}$ y así $A(x,y)=x\cdot y\rightarrow A(x)=x\sqrt{4-x^2}$. Como se trata de una función positiva, podemos elevar al cuadrado sin que por ello varíen los máximos o mínimos, de forma que consideraré la función $f(x)=(A(x))^2=x^2(4-x^2)=4x^2-x^4$

$$f'(x)=8x-4x^3$$

Para calcular los extremos igualamos a 0 la derivada, $f'(x)=0$, por tanto

$8x-4x^3=0\Rightarrow x(8-4x^2)=0\Rightarrow x=0$ o bien $x=\pm\sqrt{2}$. Está claro que las longitudes no pueden ser ni negativas ni 0, con lo que me queda sólo la solución $x=\sqrt{2}$

Calculemos la 2ª derivada:

$f''(x)=8-12x^2$ que, para el valor $x=\sqrt{2}$ resulta ser $f''(\sqrt{2})=8-24=-16<0$

y, por tanto, el punto $x=\sqrt{2}$ es un máximo. Las medidas del rectángulo buscado son: $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2^2-2}=\sqrt{2}$ y de esta manera resulta ser un cuadrado de lado $\sqrt{2}$, siendo su área 2 m^2